Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer Semestre 2025

Introducción al Cálculo - MAT1107
Interrogación N°3

1. Resuelva la inecuación

$$\sqrt{x+3} > \sqrt{|x-2|}\,.$$

Solución. Para que la inecuación esté bien definida se debe imponer la restricción

$$x+3 \geqslant 0 \Longleftrightarrow x \geqslant -3 \Longleftrightarrow x \in R_0 = [-3,\infty)$$

Elevando al cuadrado se obtiene la desigualdad

$$x+3 > |x-2|\,.$$

La inecuación tiene un solo punto crítico en $x=2$. Separando el análisis en casos se obtiene:

- Caso 1. Si $x \in (-\infty, 2]$ tenemos que

$$x+3 > 2-x \Longleftrightarrow x > -\frac{1}{2} \Longrightarrow R_1 = (-\frac{1}{2},\infty)$$

  Por lo que el conjunto solución en este caso es $S_1 = R_1 \cap (-\infty,2] = \left(-\frac{1}{2},2\right]$.

- Caso 2. Si $x \in (2,\infty)$ entonces

$$x+3 > x-2 \Longleftrightarrow 3 > -2 \Longrightarrow R_2 = \mathbb{R}$$

  Por lo que la solución en este caso es $S_2 = R_2 \cap (2,\infty) = (2,\infty)$.

Por lo tanto el conjunto solución final es la unión de estas soluciones intersectado con la restricción inicial

$$S_F = (S_1 \cup S_2) \cap R_0 = \left(-\frac{1}{2},\infty\right) \cap [-3,\infty) = \left(-\frac{1}{2},\infty\right)\,.$$

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 1.

CC 1. 1,5 puntos por determinar la restricción de la inecuación $R_0 = [-3,\infty)$.

CC 2. 1,5 puntos por determinar la solución en el caso 1.

CC 3. 1,5 puntos por determinar la solución en el caso 2.

CC 4. 1,5 puntos por obtener el conjunto de solución final.

2. Determine el dominio y recorrido de la siguiente función

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x}\,.$$

Solución. La única restricción es que el denominador no puede ser igual a 0, por lo que el dominio de f es $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Tenemos que

$$\begin{aligned} y \in \mathrm{Rec}(f) &\iff (\exists\, x \in \mathbb{R} - \{0\}) \left(y = \frac{x^2+1}{x} \right) \\ &\iff (\exists\, x \in \mathbb{R} - \{0\}) \left(yx = x^2 + 1 \right) \\ &\iff (\exists\, x \in \mathbb{R} - \{0\}) \left(0 = x^2 - yx + 1 \right) \end{aligned}$$

Esta última igualdad es una ecuación cuadrática y usando la fórmula cuadrática vemos que

$$\begin{aligned} y \in \mathrm{Rec}(f) &\iff (\exists\, x \in \mathbb{R} - \{0\}) \left(x = \frac{y \pm \sqrt{y^2-4}}{2} \right) \\ &\iff y^2 - 4 \geqslant 0 \\ &\iff (y-2)(y+2) \geqslant 0 \\ &\iff y \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathrm{Rec}(f) = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$.

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 2.

CC 1. 1,5 puntos por determinar el dominio de la función f.

CC 2. 1,5 puntos por obtener que $y \in \mathrm{Rec}(f) \iff (\exists\, x \neq 0)(0 = x^2 - yx + 1)$

CC 3. 1,5 puntos por obtener que $y \in \mathrm{Rec}(f) \iff (\exists\, x \neq 0)(\Delta = y^2 - 4 \geqslant 0)$

CC 4. 1,5 puntos por obtener que $\mathrm{Rec}(f) = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$.