Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer Semestre 2025

Introducción al Cálculo - MAT1107
Interrogación N°2

1. a) Si x es un número real tal que $0 < x < 1$, determine el valor de $\dfrac{|4x+1| - |x-1|}{x}$.

   b) Resolver la ecuación $|2x+2| = 6x - 18$.

Solución.

a) Notemos que

$$|4x+1| = \begin{cases} 4x+1 & \text{si } 4x+1 \geqslant 0 \\ -4x-1 & \text{si } 4x+1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 4x+1 & \text{si } x \geqslant -\frac{1}{4} \\ -4x-1 & \text{si } x < -\frac{1}{4} \end{cases}$$

y de manera similar

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{si } x-1 \geqslant 0 \\ -x+1 & \text{si } x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \geqslant 1 \\ -x+1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Si $x \in (0,1)$ entonces $|4x+1| = 4x+1$ y $|x-1| = 1-x$. Luego

$$\frac{|4x+1| - |x-1|}{x} = \frac{4x+1-(1-x)}{x} = \frac{5x}{x} = 5\,.$$

b) Tenemos que

$$\begin{aligned} |2x+2| = 6x-18 &\iff [6x-18 \geqslant 0 \wedge [(2x+2 = 6x-18) \vee (2x+2 = -6x+18)]] \\ &\iff [x \geqslant 3 \wedge [(x=5) \vee (x=2)]] \end{aligned}$$

Luego la solución de la ecuación es $x = 5$.

Puntaje Pregunta 1a).

- 1 punto por obtener que $|4x+1| = 4x+1$ si $x \in (0,1)$
- 1 punto por obtener que $|x-1| = 1-x$ si $x \in (0,1)$
- 1 punto por obtener que $\dfrac{|4x+1| - |x-1|}{x} = 5$.

Puntaje Pregunta 1b).

- 1 punto por obtener la restricción $6x - 18 \geqslant 0 \iff x \geqslant 3$.
- 1,5 puntos por obtener la solución $2x+2 = 6x-18$ y de $2x+2 = -(6x-18)$
- 0,5 puntos por descartar el caso $x = 2$.

2. Resuelva la inecuación

$$\frac{x}{x-4} < \frac{x-4}{x}\,.$$

Solución. Tenemos que

$$\frac{x}{x-4} < \frac{x-4}{x} \iff \frac{x}{x-4} - \frac{x-4}{x} < 0 \iff \frac{x^2-(x-4)^2}{x(x-4)} < 0 \iff \frac{8(x-2)}{x(x-4)} < 0\,.$$

Los puntos críticos de la inecuación son $x = 0$, $x = 2$, $x = 4$ y la tabla de signos es:

	$-\infty$		0		2		4		∞
$x-2$		$-$		$-$		$+$		$+$	
x		$-$		$+$		$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$		$-$		$+$	
		$-$		$+$		$-$		$+$	

Por lo tanto, el conjunto solución de la inecuación es $S = (-\infty, 0) \cup (2, 4)$.

Puntaje Pregunta 2.

- 2 puntos por reducir la inecuación y obtener una versión factorizada igual a: $\dfrac{8(x-2)}{x(x-4)} < 0$
- 1 punto por encontrar los puntos críticos de la inecuación.
- 2 puntos por realizar la tabla de signos.
- 1 punto por obtener el conjunto solución.