Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer Semestre 2025

Introducción al Cálculo - MAT1107
Interrogación N°1

1. Considere el polinomio $P(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 - x^2 + x + 2$

   a) Use el algoritmo de la división para dividir $P(x)$ por $x - 2$ indicando explícitamente el cociente y el resto.

   b) Utilizando el teorema del resto, verificar el resultado obtenido en la división anterior.

   c) Determine, usando el teorema del factor, si $x + 1$ es un factor del polinomio $P(x)$.

   d) Factorice completamente el polinomio $P(x)$.

   Solución.

   a) Realizando el algoritmo de la división, vemos que:

$$\begin{array}{rl} & x^5 - x^4 - 2x^3 - x^2 + x + 2 \quad : \quad x - 2 = x^4 + x^3 - x - 1 \\ - & x^5 - 2x^4 \\ \hline & x^4 - 2x^3 - x^2 + x + 2 \\ - & x^4 - 2x^3 \\ \hline & -x^2 + x + 2 \\ - & -x^2 + 2x \\ \hline & -x + 2 \\ - & -x + 2 \\ \hline & 0 \end{array}$$

   Entonces, el cociente de la división es $Q(x) = x^4 + x^3 - x - 1$ y el resto es 0.

   b) Por el teorema del resto, el resto de la división de $P(x)$ por $x - 2$ es

$$R = P(2) = 2^5 - 2^4 - 2 \cdot 2^3 - 2^2 + 2 + 2 = 0\,,$$

   el cual coincide con el resto obtenido en el inciso a).

   c) Por el teorema del factor $x + 1$ es factor de $P(x)$ si y solo si -1 es raíz de $P(x)$.
   En este caso, vemos que

$$P(-1) = (-1)^5 - (-1)^4 - 2(-1)^3 - (-1)^2 + (-1) + 2 = 0\,,$$

   luego -1 es raíz de $P(x)$ y por el teorema del factor $x + 1$ es factor de $P(x)$.

d) Por el inciso a) y c) tenemos que $(x+1)(x-2) = x^2 - x - 2$ es factor de $P(x)$. Realizando la división se tiene que

$$\begin{array}{rl} & x^5 - x^4 - 2x^3 - x^2 + x + 2 \quad : \quad x^2 - x - 2 = x^3 - 1 \\ - & \underline{x^5 - x^4 - 2x^3} \\ & -x^2 + x + 2 \\ - & \underline{-x^2 + x + 2} \\ & 0 \end{array}$$

Por lo tanto, tenemos que

$$P(x) = (x-2)(x+1)(x^3-1)$$

y factorizando $(x^3 - 1)$ se obtiene que la factorización de $P(x)$ es:

$$P(x) = (x-2)(x+1)(x-1)(x^2+x+1)\,.$$

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 1.

CC 1. 1,5 puntos por obtener el cociente y el resto de la división.

CC 2. 1,5 puntos por verificar que el resto es cero usando el teorema del resto.

CC 3. 1,5 puntos por verifica que -1 es raíz y concluir que $(x+1)$ es factor.

CC 4. 1,5 puntos por obtener la factorización de $P(x)$.

2. Pruebe que si $a > 1$ y $b > 1$ entonces $ab + 1 > a + b$.

Solución. Como $b > 1$ entonces $b-1 > 0$. Multiplicando la desigualdad $a > 1$ por $(b-1)$ obtenemos

$$a(b-1) > 1 \cdot (b-1) \Longleftrightarrow ab - a > b - 1$$

Sumando a a ambos lados de la desigualdad nos da $ab > a + b - 1$.

Sumando 1 a ambos lados de la última desigualdad obtenemos $ab + 1 > a + b$.

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 2.

CC 1. 3 puntos por multiplicar correctamente la desigualdad $a > 1$ por $(b-1)$, mostrando explícitamente la obtención de la desigualdad intermedia $ab - a > b - 1$.

CC 2. 2 puntos por sumar claramente a a ambos lados, obteniendo correctamente la desigualdad intermedia $ab > a + b - 1$.

CC 3. 1 punto por sumar 1 correctamente a ambos lados para concluir la demostración, obteniendo explícitamente la desigualdad solicitada $ab + 1 > a + b$.

3. Demuestre que si $x > 0$ entonces $x + \dfrac{9}{x} \geqslant 6$.

Solución. Queremos probar $x + \dfrac{9}{x} \geqslant 6$ lo cual es equivalente a probar que $x + \dfrac{9}{x} - 6 \geqslant 0$.

Notemos que

$$x + \frac{9}{x} - 6 = \frac{x^2 + 9 - 6x}{x} = \frac{x^2 - 6x + 9}{x} = \frac{(x-3)^2}{x}\,.$$

Observe que $(x-3)^2 \geqslant 0$ y como por hipótesis $x > 0$ se sigue que $\dfrac{(x-3)^2}{x} \geqslant 0$, como queríamos probar.

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 3.

CC 1. 2 puntos por transformar correctamente la expresión original a la forma $x + \dfrac{9}{x} - 6 = \dfrac{(x-3)^2}{x}$.

CC 2. 2 puntos por indicar claramente que $(x-3)^2 \geqslant 0$ para todo x real.

CC 3. 2 puntos por justificar explícitamente que la expresión $\dfrac{(x-3)^2}{x}$ es no negativa debido a que $x > 0$ por hipótesis.