Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer Semestre 2025

Introducción al Cálculo - MAT1107
Examen

1. Sea $f : A \to [0,1) \cup (1,\infty)$ definida por $f(x) = \sqrt{1 - \dfrac{2}{1+x}}$.

   a) Determine el dominio de f.

   b) Pruebe que f es inyectiva.

   c) Demuestre que f es sobreyectiva.

   d) Halle la inversa de f.

   Solución.

   a) Se tiene que $x \in \mathrm{Dom}(f)$ si y solo si

   $$1 - \frac{2}{1+x} \geqslant 0 \iff \frac{x-1}{x+1} \geqslant 0 \iff x \in (-\infty,-1) \cup [1,\infty)$$

   Entonces, $A = \mathrm{Dom}(f) = (-\infty,-1) \cup [1,\infty)$.

   b) Sean $a, b \in A$. Luego,

   $$\begin{aligned} f(a) = f(b) &\implies \sqrt{\frac{a-1}{a+1}} = \sqrt{\frac{b-1}{b+1}} \implies \frac{a-1}{a+1} = \frac{b-1}{b+1} \\ &\implies (a-1)(b+1) = (b-1)(a+1) \\ &\implies ab + a - b - 1 = ab - a + b - 1 \implies a = b \end{aligned}$$

   por lo que f es inyectiva.

   c) Vamos a determinar el recorrido de f.

   $$\begin{aligned} y \in \mathrm{Rec}(f) &\iff (\exists\, x \in A)(y = f(x)) \\ &\iff (\exists x \in A)\left(y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right) \\ &\iff (\exists x \in A)\left(y^2 = \frac{x-1}{x+1}\right) \wedge (y \geqslant 0) \\ &\iff (\exists x \in A)\left(y^2(x+1) = x - 1\right) \wedge (y \geqslant 0) \\ &\iff (\exists x \in A)\left(x = \frac{1+y^2}{1-y^2}\right) \wedge (y \geqslant 0) \\ &\iff (y \neq \pm 1) \wedge (y \geqslant 0) \end{aligned}$$

   Por lo que $\mathrm{Rec}(f) = [0,1) \cup (1,\infty) = \mathrm{Codom}(f)$ y f es sobreyectiva.

d) De lo realizado en los incisos anteriores, vemos que $f^{-1} : [0,1) \cup (1,\infty) \to (-\infty,-1) \cup [1,\infty)$ definida por $f^{-1}(x) = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$.

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 1.

CC 1. 1,5 puntos por determinar el dominio de f.

CC 2. 1,5 puntos por probar que f es inyectiva.

CC 3. 1,5 puntos por probar que f es sobreyectiva.

CC 4. 1,5 puntos por hallar la inversa de f.

2. Calcule los siguientes límites

a) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)$

b) $\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{n}}\cos\left(\frac{n^n}{n!}\right)$

Solución.

a) Amplificando obtenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)\cdot\frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n}-(n-\sqrt{n})}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}\end{aligned}$$

Amplificando por $1/\sqrt{n}$ se obtiene que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}\cdot\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}}=\frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=1\,.\end{aligned}$$

b) Para todo $n\in\mathbb{N}$ se cumple que

$$-1\leqslant\cos\left(\frac{n^n}{n!}\right)\leqslant 1\iff -\frac{3}{\sqrt{n}}\leqslant\frac{3}{\sqrt{n}}\cos\left(\frac{n^n}{n!}\right)\leqslant\frac{3}{\sqrt{n}}$$

Se tiene que

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{3}{\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{n}}=0$$

Por el teorema del sandwich se sigue que $\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{n}}\cos\left(\frac{n^n}{n!}\right)=0$

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 2.

CC 1. 1,5 puntos por amplificar por $\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}$ y simplificar.

CC 2. 1,5 puntos por amplficar por $1/\sqrt{n}$ y obtener el límite.

CC 3. 1,5 puntos por acotar la sucesión.

CC 4. 1,5 puntos por usar el teorema del sandwich y obtener el límite.

3. a) Calcule $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{3n}$.

b) Sea $\{a_n\}$ una sucesión de términos positivos y creciente.

Demuestre que la sucesión $b_n = \frac{1}{a_n}$ es convergente.

Solución.

a) Tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{3n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1+1}{n+1}\right)^{3n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{3n}$$

Haciendo el cambio de variables $m = n+1$ obtenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{3n} &= \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{3(m-1)}\\ &= \lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{3}\cdot\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-3}\\ &= e^3\cdot 1 = e^3\,.\end{aligned}$$

b) Como $\{a_n\}$ es creciente y positiva, entonces para todo $n\in\mathbb{N}$ se cumple que

$$0 < a_n \leqslant a_{n+1} \Longleftrightarrow 0 < \frac{1}{a_{n+1}} \leqslant \frac{1}{a_n} \Longleftrightarrow 0 < b_{n+1} \leqslant b_n$$

Se sigue que $\{b_n\}$ es monótona decreciente y acotada por 0. Por lo tanto, $\{b_n\}$ es convergente.

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 3.a)

CC 1. 1 punto por obtener que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{3n}$

CC 2. 1 punto por realizar el cambio de variable $m = n+1$ y obtener que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{3(m-1)}$

CC 3. 1 punto por obtener el valor del límite buscado.

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 3.b)

CC 4. 1,5 puntos por mostrar que b_n es decreciente.

CC 5. 1 punto por mostrar que b_n está acotada inferiormente.

CC 6. 0,5 puntos por concluir que b_n es convergente.

4. Para la función $g : A \to B$ definida por $g(x) = \ln(1 + e^x)$.

   a) Determine el dominio.

   b) Pruebe que g es inyectiva.

   c) Determine el conjunto B para que f sea sobreyectiva.

   d) Defina la función inversa.

   Solución.

   a) Se tiene que $x \in \text{Dom}(g) \iff 1 + e^x > 0 \iff e^x > -1 \iff x \in \mathbb{R}$. Por lo que $A = \text{Dom}(g) = \mathbb{R}$.

   b) Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Si $g(a) = g(b) \implies \ln(1 + e^a) = \ln(1 + e^b)$.
   Como la función logaritmo natural es inyectiva entonces $1 + e^a = 1 + e^b \implies e^a = e^b$.
   Como la función exponencial es inyectiva, se obtiene que $e^a = e^b \implies a = b$.
   Por lo que g es inyectiva.

   c) Basta elegir $B = \text{Rec}(g)$. Se tiene que

$$\begin{aligned} y \in \text{Rec}(g) &\iff (\exists x \in A)(y = g(x)) \iff (\exists\, x \in \mathbb{R})(y = \ln(1 + e^x)) \\ &\iff (\exists\, x \in \mathbb{R})(e^y = 1 + e^x) \\ &\iff (\exists\, x \in \mathbb{R})(e^x = e^y - 1) \\ &\iff (\exists\, x \in \mathbb{R})(x = \ln(e^y - 1)) \\ &\iff e^y - 1 > 0 \iff e^y > 1 \iff y > \ln(1) = 0 \end{aligned}$$

   Por lo que $B = \text{Rec}(g) = (0, \infty)$.

   d) Por los incisos anteriores vemos que $g^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $g^{-1}(x) = \ln(e^x - 1)$.

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 4.

CC 1. 1,5 puntos por determinar el dominio de g.

CC 2. 1,5 puntos por probar que g es inyectiva.

CC 3. 1,5 puntos por hallar el conjunto $B = \text{Rec}(g)$.

CC 4. 1,5 puntos por hallar la inversa de g.