Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
07/noviembre/2024.

MAT 1207
Pauta Interrogación 3.

Justifique claramente sus respuestas.

1. *a)* [2 puntos.] Determine en función de $x \in \mathbb{R}$, para $x \in (-1, 1)$

$$\tan\left(2\,\arctan(x)\right)$$

. **Solución:**

i) Sea $\alpha = \arctan(x)$, entonces $\tan(\alpha) = x$ y $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$. Queremos calcular $\tan(2\,\alpha)$.

ii) Además: $\tan(2\,\alpha) = \dfrac{2\,\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)} = \dfrac{2\,x}{1-x^2}$.

iii) Por lo tanto

$$\tan\left(2\,\arctan(x)\right) = \frac{2\,x}{1-x^2} \quad , \; x \in (-1,1)$$

Puntaje:

- 0,5 puntos por *i*).
- 1 punto por *ii*).
- 0,5 puntos por *iii*).

b) [2 puntos.] Determine

$$\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3} - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

Solución:

$$\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3} - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3} + \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

Puntaje:

- 0,5 puntos por usar el que arcsin es impar.
- 1 punto por obtener $\arcsin\left(\dfrac{1}{2}\right)$.
- 0,5 puntos por obtener $-\dfrac{1}{2}$.

El ejercicio anterior, también se puede resolver como:

i) Sea $\alpha = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$, entonces se trata de resolver

$$\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = -\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(\alpha) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{sen}(\alpha)\right] \quad (*)$$

ii) Como $\alpha = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) \Longrightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}(\alpha) = -\frac{1}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$$\Longrightarrow \cos(\alpha) = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

iii) Luego de $(*)$:

$$\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = -\left[\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = -\left[\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right] = -\frac{1}{2}$$

Puntaje:

- 0,5 puntos por *i*)
- 1 punto por *ii*).
- 0,5 puntos por *iii*).

c) [2 puntos.] Resuelva la ecuación:

$$\cos\left(\ \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arcsin(x)\ \right)=1$$

Solución:

$$\cos\left(\ \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arcsin(x)\ \right)=1\Longrightarrow \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arcsin(x)=\arccos(1)$$

$$\Longrightarrow \frac{\pi}{6}+\arcsin(x)=0\Longrightarrow \arcsin(x)=-\frac{\pi}{6}\Longrightarrow x=\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\Longrightarrow x=-\frac{1}{2}$$

Puntaje:

- 0,5 puntos por considerar que $\arccos(1)=0$.
- 0,5 puntos por obtener $\arcsin(x)=-\frac{\pi}{6}$.
- 1 punto por obtener $x=-\frac{1}{2}$.

2. *a)* [2 puntos.] Calcule $(-1-i)^{14}$.

Solución:

i) $-1-i = \sqrt{2}\,\mathrm{cis}\left(\dfrac{5\,\pi}{4}\right)$.

ii) Luego

$$(-1-i)^{14} = \left(\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\left(\frac{5\,\pi}{4}\right)\right)^{14} = 2^7\,\mathrm{cis}\left(\frac{70\,\pi}{4}\right)$$

iii) Como

$$\mathrm{cis}\left(\frac{70\,\pi}{4}\right) = \mathrm{cis}\left(\frac{64\,\pi}{4} + \frac{6\,\pi}{4}\right) = \mathrm{cis}\left(\frac{6\,\pi}{4}\right) = \mathrm{cis}\left(\frac{3\,\pi}{2}\right) = -i$$

iv) Luego

$$(-1-i)^{14} = -2^7\,i$$

Puntaje:

- 0,5 puntos por obtener i).
- 0,5 puntos por obtener ii).
- 0,5 puntos por obtener ii).
- 0,5 puntos por obtener iv).

b) [4 puntos.] Determine A y $B \in \mathbb{R}$, sabiendo que $w \in \mathbb{C}$ es raíz cúbica de la unidad y

$$\frac{(1+w)^7}{w^2} = A + B\,w$$

Solución:

$$\frac{(1+w)^7}{w^2} = \frac{(-w^2)^7}{w^2} = \frac{-w^{14}}{w^2} = -w^{12} = -(\cancel{w^3}^{\,1})^4 = -(1)^4 = -1$$

Por lo tanto $A = -1$ y $B = 0$.

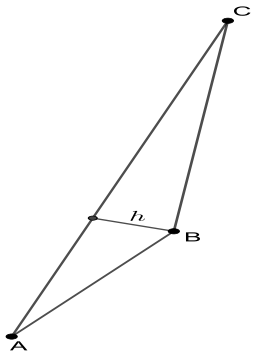
Puntaje:

- 1 punto por obtener usar el que: $1 + w = -w^2$.
- 1 punto por obtener $-w^{12}$.
- 1 punto por obtener -1.
- 1 punto por obtener los valores de A y B.

3. *a)* [4 puntos] Determine el área del triángulo $\Delta\, ABC$ sabiendo que $A(1,1)$, $B(4,5)$ y $C(6,13)$.

Solución:

- Se tiene:



- Calculamos AC.

$$AC = d\Big((1,1)\,,\,(6,13)\Big) = \sqrt{(1-6)^2+(1-13)^2} = \sqrt{(-5)^2+(-12)^2}$$

$$= \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$$

- La altura h corresponde a la distancia desde B a $\overleftrightarrow{AC}$ para determinar $\overleftrightarrow{AC}$ consideramos que la pendiente es

$$m = \frac{13-1}{6-1} = \frac{12}{5}$$

y $\overleftrightarrow{AC}$ pasa por $(1,1)$, luego

$$\overleftrightarrow{AC} : y - 1 = \frac{12}{5}\,(x-1) \Longrightarrow \overleftrightarrow{AC} : 12x - 5y - 7 = 0$$

- Así h es:

$$h = d\Big(B\,,\,\overleftrightarrow{AC}\Big) = \frac{|12\cdot 4 - 5\cdot 5 - 7|}{\sqrt{12^2+(-5)^2}} = \frac{16}{13}$$

- Por lo tanto el área del $\Delta\, ABC$ es:

$$\frac{1}{2}\cdot 13 \cdot \frac{16}{13} = 8$$

Puntaje:

- 1 punto por obtener AB.
- 1,5 puntos por obtener $\overleftrightarrow{AC}$.
- 1 punto por obtener h.
- 0,5 puntos por el área del triángulo.

b) [2 puntos] Dados los puntos $A(1,2)$ y $B(2,1)$, determine el lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ tales que $d(P,A) = d(P,B)$.

Solución: Sea $P(x,y)$ en el Lugar Geométrico, entonces

$$i) P(x,y) \in \mathcal{L}.\mathcal{G} \iff d(P,A) = d(P,B) \iff \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}$$

$$\iff (x-1)^2+(y-2)^2 = (x-2)^2+(y-1)^2 \iff x^2-2x+1+y^2-4y+4 = x^2-4x+4+y^2-2y+1$$

$$\iff 2x = 2y \iff x = y$$

De donde el lugar Geométrico es la recta de ecuación $y = x$ (la simetral).

Puntaje:

- 1 punto por obtener plantear i)
- 1 punto por obtener que el lugar geométrico es una recta. (no tienen obligación de reconocer que es la simetral).

4. Dada la circunferencia: $\mathcal{C} : (x-4)^2 + (y-2)^2 = 2$.

   a) [2 puntos] Determine la ecuación de la tangente desde el punto $P(5,3)$ a $\mathcal{C}$.

   Solución: Como $P \in \mathcal{C}$, entonces la ecuación de la recta tangente T es la ecuación desdoblada de

   $$\mathcal{C} : x^2 - 8x + y^2 - 4y + 18 = 0$$

   ésto es:

   $$T : x\,x_0 - 4(x + x_0) + y\,y_o - 2(y + y_0) + 18 = 0$$

   y en este caso $(x_0, y_0) = (5, 3)$, entonces:

   $$T : 5x - 4(x+5) + 3y - 2(y+3) + 18 = 0$$

   $$\Longrightarrow T : x + y - 8 = 0$$

   Puntaje:

   - 1 punto por usar el que como $P \in \mathcal{C}$, entonces la recta tangente es la ecuación desdoblada.
   - 1 punto por obtener la tangente.

b) [4 puntos] Determine las ecuaciones de las tangentes trazadas desde el origen $O(0,0)$ a $\mathcal{C}$.

Solución:

i) En este caso $P \notin \mathcal{C}$, luego trazamos la circunferencia $\mathcal{C}_1$ de diámetro los puntos $(0,0)$ y $(4,2)$ y se tiene:

$$\mathcal{C}_1 : (x-0)(x-4) + (y-0)(y-2) = 0 \Longrightarrow \mathcal{C}_1 : x^2 - 4x + y^2 - 2y = 0$$

ii) Para determinar el eje radical entre $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}_1$, restamos las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcl} x^2 - 8x + y^2 - 4y + 18 & = & 0 \\ x^2 - 4x + y^2 - 2y & = & 0 \end{array}\right| \Longrightarrow 4x + 2y - 18 = 0$$

de donde la ecuación del eje radical es:

$$2x + y - 9 = 0 \Longrightarrow y = 9 - 2x$$

iii) Intersectando el eje radical con $\mathcal{C}_1$ (o $\mathcal{C}$) se tiene:

$$x^2 - 4x + (9-2x)^2 - 2(9-2x) = 0 \Longrightarrow 5x^2 - 36x + 63 = 0$$

$$\Longrightarrow x = \frac{36 \pm \sqrt{1296 - 1260}}{10} \Longrightarrow x = \frac{36 \pm \sqrt{36}}{10} \Longrightarrow x = \frac{36 \pm 6}{10}$$

$$\Longrightarrow x = \frac{21}{5} \quad \vee \quad x = 3$$

Luego los puntos de tangencia son $\left(\frac{21}{5}, \frac{3}{5}\right)$ y $(3,3)$.

iv) Las tangentes a $\mathcal{C}$, desde el origen $O(0,0)$ están dadas por:

T_1 que pasa por $(0,0)$ y $\left(\frac{21}{5}, \frac{3}{5}\right)$, cuya ecuación es

$$y = \frac{x}{7}$$

y T_2 que pasa por $(0,0)$ y $(3,3)$, cuya ecuación es

$$y = x$$

Puntaje:

- 1 punto por obtener *i*).
- 1 punto por obtener *ii*).
- 1 punto por obtener *iii*).
- 1 punto por obtener *iv*).