Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
10/octubre/2024.

MAT 1207
Pauta Interrogación 2.

1. *a*) Determine un polinomio $p(x)$ de grado 3, en que dos de sus raíces son 1 y -2, $p(-1) = 4$ y $p(2) = 28$.

Solución:

a) Como 1 y -2 son dos raíces de $p(x)$, entonces $p(x)$ es divisible por $(x-1)$ y por $(x+2)$, además como ya tiene dos raíces reales, esto significa que las tres raíces son reales.

b) Luego $p(x)$ es de la forma:

$$p(x) = (x-1)(x+2)(ax+b)$$

c) De acuerdo a las condiciones del problema:

$$\left.\begin{array}{l} p(-1) = 4 \implies -2(-a+b) = 4 \implies a-b = 2 \\ p(2) = 28 \implies 4(2a+b) = 4 \implies 2a+b = 7 \end{array}\right\}$$

$$\implies \left.\begin{array}{r} a-b = 2 \\ 2a+b = 7 \end{array}\right| \implies a = 3 \ \wedge \ b = 1$$

d) Así $p(x) = (x-1)(x+2)(3x+1)$.

Puntaje:

- 1 punto por *a*)
- 0,5 puntos por *b*).
- 1 punto por *c*).
- 0,5 puntos por *d*).

b) Determine a y $b \in \mathbb{R}$ de modo que el polinomio

$$p(x) = -x^4 + 6x^3 - 10x^2 + ax + b$$

sea divisible por $x^2 - 4x + 5$.

Solución:

a) $p(x)$ es divisible por $x^2 - 4x + 5$, si el resto de la división es el polinomio nulo.

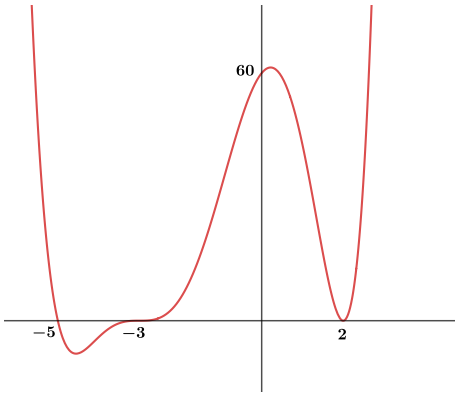
b) Dividiendo $p(x)$ por $x^2 - 4x + 5$, se obtiene como cociente a $q(x) = -x^2 + 2x + 3$ y resto $r(x) = (a + 2)x + (b - 15)$.

c) Como el resto debe ser el polinomio nulo, entonces $a + 2 = 0$ y $b - 15 = 0$, luego $a = -2$ y $b = 15$.

Puntaje:

- 0,5 puntos por *a*)
- 2 puntos por *b*).
- 0,5 puntos por *c*).

2. *a)* [4 puntos.] Determine una fórmula para el polinomio de grado 6, cuya gráfica es:



Solución:

a) De acuerdo al gráfico, para $p(x)$ se tiene que: $x = -5$ es raíz de multiplicidad 1; $x = -3$ es una raíz de multiplicidad 3 y $x = 2$ es una raíz de multiplicidad 2.

b) Por lo tanto, $p(x)$ es de la forma:

$$p(x) = a\,(x+5)(x+3)^3(x-2)^2$$

c) Además $p(0) = 60$, y como

$$p(0) = a \cdot 5 \cdot 27 \cdot 4 = 60 \Longrightarrow a = \frac{1}{9}$$

d) Así

$$p(x) = \frac{1}{9}\,(x+5)(x+3)^3(x-2)^2$$

Puntaje:

- 2 puntos por *a)*
- 1 punto por *b)*.
- 0,5 puntos por *c)*.
- 0,5 puntos por *d)*.

b) [2 puntos.] Determine $k \in \mathbb{R}$ de modo que el polinomio $p(x) = x^3 + kx^2 - kx + 9$, tenga a $(x+3)$ como factor.

Solución: Si $(x+3)$ es un factor de $p(x)$, entonces -3 es raíz de $p(x)$, luego:

$$p(-3) = 0 \Longrightarrow -27 + 9k + 3k + 9 = 0 \Longrightarrow 12k - 18 = 0$$

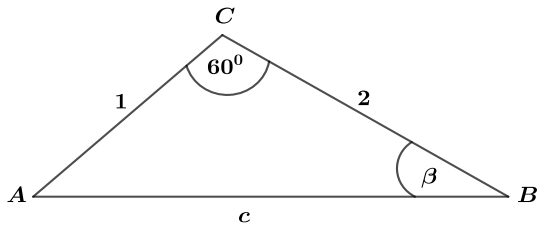
$$\Longrightarrow k = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

Puntaje:

- 1 punto por concluir que -3 es raíz de $p(x)$, luego $p(-3) = 0$.
- 1 puntos por obtener k.

3. *a)* Dado el triángulo $\Delta\, ABC$ con $a = 2\,,\, b = 1\,,\, \measuredangle\gamma = 60^o$, determine $\measuredangle\beta$.

Solución: Se tiene:



Por Teorema del coseno:

$$c^2 = 4 + 1 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos(\gamma) \Longrightarrow c^2 = 4 + 1 - 2 = 3 \Longrightarrow c = \sqrt{3}$$

Ahora por teorema del seno

$$\frac{\text{sen}(\beta)}{1} = \frac{\text{sen}(60^o)}{\sqrt{3}} \Longrightarrow \text{sen}(\beta) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \measuredangle\beta = 30^o$$

Puntaje:

- 0,5 puntos por ubicar los valores en el triángulo.
- 1 punto por usar el teorema del coseno y obtener $c = \sqrt{3}$.
- 1 punto por usar el teorema del seno y obtener $\text{sen}(\beta) = \frac{1}{2}$.
- 0,5 puntos por determinar que $\beta = 30^o$.

b) Demuestre la identidad:

$$\Big(\operatorname{sen}(\alpha)+\csc(\alpha)\Big)^2+\Big(\cos(\alpha)+\sec(\alpha)\Big)^2=\tan^2(\alpha)+\cot^2(\alpha)+7$$

Solución:

$$\Big(\operatorname{sen}(\alpha)+\csc(\alpha)\Big)^2+\Big(\cos(\alpha)+\sec(\alpha)\Big)^2=\Big(\operatorname{sen}^2(\alpha)+2\,\operatorname{sen}(\alpha)\,\csc(\alpha)+\csc^2(\alpha)\Big)$$

$$+\Big(\cos^2(\alpha)+2\,\cos(\alpha)\,\sec(\alpha)+\sec^2(\alpha)\Big)$$

$$=\Big(\operatorname{sen}^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)\Big)+2+\csc^2(\alpha)+2+\sec^2(\alpha)=5+\csc^2(\alpha)+\sec^2(\alpha)$$

$$=5+\Big(1+\cot^2(\alpha)\Big)+\Big(1+\tan^2(\alpha)\Big)$$

$$=7+\cot^2(\alpha)+\tan^2(\alpha)$$

Puntaje:

- 0,5 puntos por desarrollar los cuadrados de binomio.
- 1 punto por obtener $5+\csc^2(\alpha)+\sec^2(\alpha)$
- 1 puntos por aplicar las identidades de $\csc^2$ y $\sec^2$
- 0,5 puntos por obtener el resultado final.

4. *a)* Determine $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$ sabiendo que α está en el tercer cuadrante, β en el segundo cuadrante y que $\cos(\alpha)=-\dfrac{1}{3}$ y $\operatorname{sen}(\beta)=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Solución:

a) Sabemos que $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)-\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$

Conocemos $\cos(\alpha)$ y $\operatorname{sen}(\beta)$, nos falta determinar $\operatorname{sen}(\alpha)$ y $\cos(\beta)$.

b) Para $\operatorname{sen}(\alpha)$:

$\cos(\alpha)=-\dfrac{1}{3}$ y α está en el tercer cuadrante, luego $\operatorname{sen}(\alpha)<0$ y como

$$\operatorname{sen}^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1 \Longrightarrow \operatorname{sen}^2(\alpha)=1-\cos^2(\alpha) \Longrightarrow \operatorname{sen}(\alpha)=-\sqrt{1-\cos^2(\alpha)}$$

$$\Longrightarrow \operatorname{sen}(\alpha)=-\sqrt{1-\frac{1}{9}}=-\sqrt{\frac{8}{9}}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

c) Para $\cos(\beta)$:

$\operatorname{sen}(\beta)=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ y β está en el segundo cuadrante, luego $\cos(\beta)<0$ y como

$$\operatorname{sen}^2(\beta)+\cos^2(\beta)=1 \Longrightarrow \cos^2(\beta)=1-\operatorname{sen}^2(\beta) \Longrightarrow \cos(\beta)=-\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\beta)}$$

$$\Longrightarrow \cos(\beta)=-\sqrt{1-\frac{4}{5}}=-\sqrt{\frac{1}{5}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$$

d) Por lo tanto:

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\Big(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\Big)\Big(-\frac{1}{\sqrt{5}}\Big)-\Big(-\frac{1}{3}\Big)\Big(\frac{2}{\sqrt{5}}\Big)=\frac{2\sqrt{2}+2}{3\sqrt{5}}$$

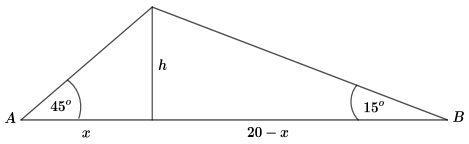
Puntaje:

- 0,5 puntos por *a*).
- 1 punto por *b*).
- 1 punto por *c*)
- 0,5 puntos por *d*).

b) Un observador situado en un punto A, ve la parte superior de una torre con un ángulo de elevación de 45^0. Otro observador B situado a 20 metros de A, en el mismo plano horizontal y al otro lado de la torre, observa la parte superior de ésta, con un ángulo de elevación de 15^0. Determine la altura de la torre.

Solución:

a) Sea h la altura de la torre. Se tiene:



b) Además:

$$\left.\begin{array}{rcl} \tan(45^0) & = & \dfrac{h}{x} \\ \tan(15^0) & = & \dfrac{h}{20-x} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} 1 & = & \dfrac{h}{x} \quad (1) \\ \tan(15^0) & = & \dfrac{h}{20-x} \quad (2) \end{array}\right\}$$

c) De (1) se tiene que $h = x$ y luego de (2):

$$\tan(15^0) = \frac{h}{20-h} \quad (*)$$

d) Para $\tan(15^0)$, consideramos que:

$$\tan(15^0) = \tan(45^0 - 30^0) = \frac{\tan(45^0) - \tan(30^0)}{1 + \tan(45^0)\,\tan(30^0)} = \frac{1 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 1 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

e) Luego reemplazando en $(*)$, se tiene:

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{h}{20-h} \Longrightarrow (\sqrt{3}-1)\,(20-h) = h\,(\sqrt{3}+1) \Longrightarrow 20\sqrt{3}-20-h\sqrt{3}+h = h\sqrt{3}+h$$

$$\Longrightarrow 2h\sqrt{3} = 20\sqrt{3} - 20 \Longrightarrow h = \frac{10\sqrt{3}-10}{\sqrt{3}}$$

Puntaje:

- 0,5 puntos por a).
- 0,5 puntos por b).
- 1 punto por c).
- 0,5 puntos por d).
- 0,5 puntos por e).