Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
09/diciembre/2024.

MAT 1207
Pauta Examen.

Justifique claramente sus respuestas.

1. *a*) Determine un polinomio $p(x)$ de grado 4, en que dos de sus raíces son 1 y -2 y 1 es una raíz de multiplicidad 2. Además $p(0) = 4$ y $p(-1) = 20$.

Solución:

a) Como 1 y -2 son dos raíces de $p(x)$ y 1 es raíz de multiplicidad 2, entonces $p(x)$ es divisible por $(x-1)^2$ y por $(x+2)$, además como ya tiene tres raíces reales, esto significa que las cuatro raíces son reales.

b) Luego $p(x)$ es de la forma:

$$p(x) = (x-1)^2(x+2)(ax+b)$$

c) De acuerdo a las condiciones del problema:

$$\left.\begin{array}{lllll} p(0) = 4 & \Longrightarrow & 2b = 4 & \Longrightarrow & b = 2 \\ p(-1) = 20 & \Longrightarrow & 4(-a+b) = 20 & \Longrightarrow & -a+b = 5 \end{array}\right\} \Longrightarrow a = -3 \ \wedge \ b = 2$$

d) Así $p(x) = (x-1)(x+2)(-3x+2)$.

Puntaje:

- 0,5 puntos por la parte *a*).
- 1 punto por la parte *b*).
- 1 punto por la parte *c*).
- 0,5 puntos por la parte *d*).

b) Determine todas las raíces del polinomio

$$p(x) = x^3 + x + 10$$

Solución:

a) Supongamos que $\frac{a}{b}$ es una raíz racional de $p(x)$, entonces

$$\left.\begin{array}{r} a|10 \\ b|1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} a & = & \pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10 \\ b & = & \pm 1 \end{array} \left.\right\} \Longrightarrow \frac{a}{b} = \pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$$

b) Se tiene que $p(-2) = 0$, luego 2 es una raíz de $p(x)$, por lo tanto, $x + 2$ es un factor de $p(x)$.

c) Dividiendo $p(x)$ por $x + 2$, se tiene que

$$p(x) = (x + 2)(x^2 - 2x + 5)$$

d) Las restantes raíces de $p(x)$ se obtienen resolviendo:

$$x^2 - 2x + 5 = 0 \Longrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4\,i}{2} = 1 \pm 2\,i$$

e) Por lo tanto las 3 raíces de $p(x)$ son: $-2\,,\ 1 + 2i\,,\ 1 - 2i$.

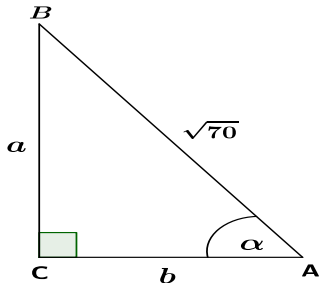
Puntaje:

- 0,5 puntos por la parte a).
- 0,5 puntos por la parte b).
- 0,5 puntos por la parte c).
- 1 punto por la parte d).
- 0,5 puntos por la parte e).

2. *a)* El triángulo ΔABC es rectángulo en C, $AB = \sqrt{70}$ y $\sphericalangle BAC = \alpha$ es tal que $\tan(\alpha) = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$. Determine BC y el área del triángulo.

Solución:

a) Se tiene:



b) Como $\tan(\alpha) = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$, entonces

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{\sqrt{5}} \Longrightarrow a = \frac{3b}{\sqrt{5}}$$

c) Usando Pitágoras, ya que el triángulo es rectángulo, se tiene:

$$a^2 + b^2 = 70 \Longrightarrow \frac{9b^2}{5} + b^2 = 70 \Longrightarrow \frac{14b^2}{5} = 70 \Longrightarrow b^2 = 25 \Longrightarrow b = 5$$

d) Luego $BC = a = 3\sqrt{5}$.

e) Por último el área del ΔABC es:

$$(\Delta ABC) = \frac{1}{2}\, a\, b = \frac{1}{2}\, 3\sqrt{5} \cdot 5 = \frac{15\sqrt{5}}{2}$$

Puntaje:

- 0,5 puntos por la parte a).
- 0,5 puntos por la parte b).
- 0,5 puntos por la parte c).
- 0,5 puntos por la parte d).
- 1 punto por la parte e).

b) Resuelva la ecuación trigonométrica:

$$\tan(x) - \cot(x) = \csc(x)$$

Solución:

$$\tan(x) - \cot(x) = \csc(x) \Longrightarrow \tan(x) - \cot(x) - \csc(x) = 0 \Longrightarrow \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} - \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} - \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{\operatorname{sen}^2(x) - \cos^2(x) - \cos(x)}{\operatorname{sen}(x)\ \cos(x)} = 0 \Longrightarrow \frac{(1 - \cos^2(x)) - \cos^2(x) - \cos(x)}{\operatorname{sen}(x)\ \cos(x)} = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{-2\cos^2(x) - \cos(x) + 1}{\operatorname{sen}(x)\ \cos(x)} = 0 \Longrightarrow -2\cos^2(x) - \cos(x) + 1 = 0 \quad (1)$$

De donde se tiene:

$$\cos(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{-4} \Longrightarrow \cos(x) = \frac{1 \pm 3}{-4} \Longrightarrow \begin{cases} \cos(x) = -1 \quad (I) \\ \quad \vee \\ \cos(x) = \dfrac{1}{2} \quad (II) \end{cases} \quad (2)$$

Para (I):

$$\cos(x) = -1 \Longrightarrow x = \pm\ \operatorname{arc}\cos(-1) + k\,\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z} \Longrightarrow x = \pm\,\pi + k\,\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z} \quad (3)$$

Para (II):

$$\cos(x) = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = \pm\ \operatorname{arc}\cos\left(\frac{1}{2}\right) + k\,\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z} \Longrightarrow x = \pm\,\frac{\pi}{3} + k\,\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z} \quad (4)$$

Puntaje:

- 0,5 puntos hasta obtener (1).
- 0,5 puntos hasta obtener (2)
- 1 punto por (3).
- 1 punto por (4).

3. *a)* Calcule $(1-i)^{12}$ y exprese la respuesta en la forma $a+bi$.

Solución:

i) $1-i=\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\left(\dfrac{7\,\pi}{4}\right)$.

ii) Luego

$$(1-i)^{12}=\left(\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\left(\frac{7\,\pi}{4}\right)\right)^{12}=2^{6}\,\mathrm{cis}\,(21\,\pi)$$

iii) Como

$$\mathrm{cis}\,(21\,\pi)=\mathrm{cis}\,(20\,\pi+\pi)=\mathrm{cis}\,(10\cdot(2\pi)+\pi)=\mathrm{cis}\,(\pi)=-1$$

iv) Luego

$$(1-i)^{12}=-2^{6}$$

Puntaje:

- 1 puntos por i).
- 0,5 puntos por ii).
- 1 punto por iii).
- 0,5 puntos por iv).

b) Determine A y $B \in \mathbb{R}$, sabiendo que $w \in \mathbb{C}$ es raíz cúbica de la unidad distinta de 1 y

$$(1+w)^5 = A + B\,w$$

Solución:

$$(1+w)^5 = (-w^2)^5 = -w^{10} = -w^9 \cdot w = -\cancel{(w^3)^3}^{1} \cdot w = -w$$

Por lo tanto $A = 0$ y $B = -1$.

Puntaje:

- 1 puntos por usar el que $1 + w = -w^2$.
- 0,5 puntos por obtener $-w^{10}$
- 1 punto por obtener $-w$
- 0,5 puntos por concluir que $A = 0$ y $B = -1$.

4. Determine las rectas tangentes a la circunferencia $\mathcal{C}$ de ecuación:

$$\mathcal{C} : (x-2)^2 + (y-3)^2 = 5$$

que son paralelas a la recta $y = 2x$.

Solución:

i) La recta tangente T a $\mathcal{C}$ en un punto (x_0, y_o) está dada por la ecuación desdoblada:

$$(x_0 - 2)(x-2) + (y_0 - 3)(y-3) = 5$$

ii) Como T debe ser paralela a la recta $y = 2x$ entonces la pendiente de T debe ser 2, luego

$$-\frac{x_0 - 2}{y_0 - 3} = 2 \Longrightarrow x_0 = 8 - 2y_0$$

iii) Como $(x_0.y_0) \in \mathcal{C}$, entonces:

$$(x_0-2)^2 + (y_0-3)^2 = 5 \Longrightarrow (8 - 2y_0 - 2)^2 + (y_0-3)^2 = 5 \Longrightarrow (6-2y_0)^2 + (y_0-3)^2 = 5$$

$$\Longrightarrow 5y_0^2 - 30y_0 + 40 = 0 \Longrightarrow y_0^2 - 6y_0 + 8 = 0 \Longrightarrow (y_0-4)(y_0-2) = 0$$

$$\Longrightarrow y_o = 4 \ \vee \ y_0 = 2$$

iv) Luego los puntos de tangencia son $(0, 4)$ y $(4, 2)$.

v) De donde las rectas tangentes a $\mathcal{C}$ paralelas a la recta $y = 2x$ son:

$$T_1 : y = 2x + 4$$

$$T_2 : y = 2x - 6$$

Puntaje:

- 1 puntos por i).
- 1 punto por ii).
- 2 puntos por iii).
- 1 punto por iv).
- 1 punto por v).

5. Dada la elipse $\mathcal{E}$ de ecuación:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$$

a) Determine los focos y vértices de $\mathcal{E}$.

Solución:

- Como el eje de la elipse es el eje X, entonces los vértices son $(\pm 6\,,\,0)$.
- Además $c^2 = 36 - 16 = 20$, luego los focos son $(\pm\sqrt{20}\,,\,0)$.

Puntaje:

- 1 puntos por los vértices.
- 2 puntos por los focos.

b) Determine la ecuación de la hipérbola $\mathcal{H}$ que tiene por focos y vértices respectivamente, los vértices y los focos de la elipse $\mathcal{E}$.

Solución:

i) Como la hipérbola tiene focos y vértices que son respectivamente los vértices y los focos de la elipse, entonces el eje de la hipérbola es el eje X, luego $\mathcal{H}$ es de la forma:

$$\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ii) Como los vértices son $(\pm\sqrt{20}\,,\,0)$, entonces $a^2 = 20$.

iii) Por otra parte como los focos son $(\pm 6\,,\,0)$, entonces $c^2 = 36$ y como

$$c^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow 36 = 20 + b^2 \Longrightarrow b^2 = 16$$

iv) Así la ecuación de la hipérbola $\mathcal{H}$ es:

$$\mathcal{H} : \frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{16} = 1$$

Puntaje:

- 1 punto por i).
- 0,5 puntos por ii).
- 1 punto por iii).
- 0,5 puntos por iv).