1. Resuelva la siguiente inecuación

$$\frac{x^2+4x-12}{x^2-6x+8} \leqslant -1\,.$$

$$\frac{x^2+4x-12}{x^2-6x+8} + 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+4x-12+x^2-6x+8}{x^2-6x+8} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2-2x-4}{x^2-6x+8} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x^2-x-2)}{(x-2)(x-4)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x+1)(x-2)}{(x-2)(x-4)} \leq 0.$$

Los ptos críticos son $x = -1, 2, 4$ y además $x \neq 2, 4$. Como $x \neq 2$ podemos cancelar el $x-2$.

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)}{(x-4)} \leq 0.$$

	$-\infty$		-1		4		∞
$x+1$	$-$		$+$		$+$		
$x-4$	$-$		$-$		$+$		
$\frac{x+1}{x-4}$	$+$		$-$		$+$		

Luego, $\frac{x+1}{x-4} \leq 0 \iff x \in [-1, 4)$

Como $x \neq -2$ se tiene que

$$\frac{x^2+4x-12}{x^2-6x+8} \leq -1 \iff x \in [-1, 2) \cup (2, 4)$$

∎

(1) Encuentre el dominio y el recorrido de la función

$$f(x) = \sqrt{2x - x^2}.$$

El dominio de esta función es:

$\{ x \in \mathbb{R} : 2x - x^2 \geq 0 \}$.

$2x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x(2-x) \geq 0$.

Los ptos críticos son: $x = 0$ y $x = 2$.

	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		$-$		$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$		$-$	
$x(2-x)$		$-$		$+$		$-$	

Luego, $x(2-x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0,2]$

$\therefore$ Dom $f = [0,2]$

Recorrido: $\text{Rec } f = \{ y \in \mathbb{R} : \exists\, x \in \text{Dom } f \;\; y = f(x) \}$

$y = \sqrt{2x - x^2}$ $|()^2$ con $x \in [0,2]$

$\Leftrightarrow y^2 = 2x - x^2$, $y \geq 0$. $\sqrt{y^2} = |y| = y$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + y^2 = 0$

Queremos ver cuando esta ecuación tiene sol.

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot y^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 4 - 4y^2 \geq 0. \quad \backslash \cdot 1/4$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{1 - y^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (1-y)(1+y) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad y \in [-1, 1]$$

Luego, el recorrido de f es $[-1,1] \cap [0, \infty)$

$$= [0, 1]$$ ∎

27. Considere la función definida por $h(x) = \ln\left(\frac{3^x-1}{3^x+1}\right)$.

a) Determine el dominio de h.

b) Demuestre que h es inyectiva.

c) Determine la inversa de h.

a) Sea $f(x) = \dfrac{3^x - 1}{3^x + 1}$, $g(x) = \ln(x)$.

Notemos que: $h(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$

$$= g\left(\frac{3^x - 1}{3^x + 1}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{3^x - 1}{3^x + 1}\right).$$

Luego: $\text{Dom } h = \text{Dom } g \circ f$

$$= \{ x \in \mathbb{R} : x \in \text{Dom } f \wedge f(x) \in \text{Dom } g \}.$$

- $\text{Dom } f$:

$f(x)$ está bien definida si $3^x + 1 \neq 0$ pero esto se cumple siempre porque $3^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\therefore$ $\text{Dom } f = \mathbb{R}$.

- $\text{Dom } g = \mathbb{R}^+$

Ahora debemos ver cuando $f(x) > 0$.

$\Leftrightarrow \dfrac{3^x - 1}{3^x + 1} > 0 \quad | \cdot (3^x + 1)$

Como $3^x + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 3^x - 1 > 0$

$\Leftrightarrow 3^x > 1 = 3^0 \quad | \log_3$

Como $\log_3$ es creciente, preserva la desigualdad.

$\Leftrightarrow \log_3 3^x = x > \log_3 1 = 0$

Luego: $x \in \text{Dom } f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

y $f(x) \in \text{Dom } g \Leftrightarrow x > 0$

$\Rightarrow \text{Dom } h = \mathbb{R} \cap (0, +\infty) = (0, +\infty)$

b) pd: h es injectiva.

Sean $x, y \in Dom\, h$ tal que $h(x) = h(y)$, queremos demostrar que $x = y$.

$$h(x) = h(y) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{3^x - 1}{3^x + 1}\right) = \ln\left(\frac{3^y - 1}{3^y + 1}\right) \quad \backslash \exp.$$

$$\Leftrightarrow \exp\left(\ln\left(\frac{3^x - 1}{3^x + 1}\right)\right) = \exp\left(\ln\left(\frac{3^y - 1}{3^y + 1}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3^x - 1}{3^x + 1} = \frac{3^y - 1}{3^y + 1} \quad \backslash \cdot (3^x + 1)(3^y + 1)$$

$$\Leftrightarrow (3^x - 1)(3^y + 1) = (3^y - 1)(3^x + 1)$$

$$\cancel{3^{x+y}} + 3^x - 3^y - \cancel{1} = \cancel{3^{y+x}} + 3^y - 3^x - \cancel{1} \quad \backslash + 3^x + 3^y$$

$$\Leftrightarrow \cancel{2} \cdot 3^x = \cancel{2} \cdot 3^y$$

$$\Leftrightarrow 3^x = 3^y \quad \backslash \log_3$$

$$\Leftrightarrow \log_3(3^x) = x = y = \log_3(3^y)$$

$\therefore$ h es injectiva.

c) Determinar la inversa de h.

$$h(x) = y \iff \ln\left(\frac{3^x - 1}{3^x + 1}\right) = y \quad | \exp.$$

$$\iff \exp\left(\ln\left(\frac{3^x - 1}{3^x + 1}\right)\right) = e^y$$

$$\iff \frac{3^x - 1}{3^x + 1} = e^y \quad | \cdot (3^x + 1)$$

$$\iff 3^x - 1 = e^y \cdot (3^x + 1)$$

$$\iff 3^x - 1 = e^y \cdot 3^x + e^y \quad | -e^y \cdot 3^x$$

$$\iff 3^x - 1 - e^y \cdot 3^x = e^y$$

$$\iff 3^x (1 - e^y) - 1 = e^y \quad | +1$$

$$\iff 3^x (1 - e^y) = e^y + 1 \quad | \cdot \frac{1}{1 - e^y}$$

$$\iff 3^x = \frac{e^y + 1}{1 - e^y} \quad | \log_3$$

$$\iff \log_3 3^x = x = \log_3\left(\frac{e^y + 1}{1 - e^y}\right)$$

Luego: $h^{-1}(x) = \log_3\left(\frac{e^x + 1}{1 - e^x}\right)$

2. Calcule $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{3^{k+1}}{4^k}$.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{3^{k+1}}{4^k} = \sum_{k=1}^{n} 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^k$$

$$= 3 \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^k \quad (*)$$

Recordemos que: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$

Notemos que:

$$(*) = 3 \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^k + 1 - 1 \right)$$

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^k = \left(\frac{3}{4}\right)^0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^k$$

$$= 3 \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^k - 1 \right)$$

$$= 3 \cdot \left(\frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1 - 3/4} - 1 \right)$$

$$= \frac{3 \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right) \cdot 4}{1/4 \cdot 4} - 3$$

$$= 12\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right) - 3$$

$$= 12 - 12\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 3$$

$$= 9 - 12 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$$

■

1. Encontrar el coeficiente de x^n en $(1+x)^{2n}$.

$$(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \cdot x^k \cdot 1^{2n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \cdot x^k$$

El coef. de x^n se va a tener cuando $k = n$

$$\Rightarrow \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(2n-n)!\, n!} = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!}$$

∎

(b) Calcule el coeficiente que acompaña a x^{-30} en la expansión de

$$\left(2+\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{54}\right)^2.$$

(3 puntos)

$$\left(2+\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{54}\right)^2$$

$$= 2^2 + 2\cdot 2\cdot\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{54} + \left(\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{54}\right)^2$$

$$= 4 + 4\cdot\underbrace{\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{54}}_{i)} + \underbrace{\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{108}}_{ii)}$$

i) $$\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{54} = \sum_{k=0}^{54}\binom{54}{k}\cdot x^{2k}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^{54-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{54}\binom{54}{k}\cdot x^{2k}\cdot x^{-54+k}$$

$$= \sum_{k=0}^{54}\binom{54}{k}\cdot x^{3k-54}$$

Queremos ver para cual k se tiene que $3k-54=-30$

$$3k = 24 \iff k = 8$$

Luego, el coef cuando $k = 8$ es $\binom{54}{8}$

y al multiplicar por 4 nos queda $4 \cdot \binom{54}{8}$

Ahora para ii)

$$\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{108} = \sum_{k=0}^{108} \binom{108}{k} \cdot x^{2k} \cdot (x^{-1})^{108-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{108} \binom{108}{k} \cdot x^{3k-108}$$

Queremos ver cuando $3k - 108 = -30$

$$\Leftrightarrow 3k = 78$$

$$\Leftrightarrow k = 26$$

Luego, el coef de la expresión es $\binom{108}{26}$

Finalmente, el coef. de la expresión completa es:

$$4 \cdot \binom{54}{8} + \binom{108}{26}$$

■

3. Resuelva los siguientes problemas

a) Calcule

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k - \sqrt{k^2 - 1}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}}.$$

Notemos que:

$$\frac{K - \sqrt{K^2 - 1}}{\sqrt{K} \cdot \sqrt{K+1}} = \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{K} \cdot \sqrt{K+1}} - \frac{\sqrt{K-1} \cdot \sqrt{K+1}}{\sqrt{K} \cdot \sqrt{K+1}}$$

$$= \sqrt{\frac{K}{K+1}} - \sqrt{\frac{K-1}{K}}$$

$$\sum_{K=1}^{n} \sqrt{\frac{K}{K+1}} - \sqrt{\frac{K-1}{K}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{1+1}} - \sqrt{\frac{0}{1}} + \sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$+ \dots + \sqrt{\frac{n}{n+1}} - \sqrt{\frac{n-1}{n}}$$

$$= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$$

(4) Calcule

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k(k+1)2^k}$$

$$\frac{k+2}{k(k+1)\cdot 2^k} = \frac{\cancel{k+1}}{k\cancel{(k+1)}\cdot 2^k} + \frac{1}{k(k+1)\cdot 2^k}$$

$$= \frac{1}{k\cdot 2^k} + \frac{k+1-k}{k(k+1)\cdot 2^k}$$

$$= \frac{1}{k\cdot 2^k} + \frac{\cancel{k+1}}{k\cancel{(k+1)}\cdot 2^k} - \frac{\cancel{k}}{\cancel{k}(k+1)\cdot 2^k}$$

$$= \frac{1}{k\cdot 2^k} + \frac{1}{k\cdot 2^k} - \frac{1}{(k+1)\cdot 2^k}$$

$$= \frac{\cancel{2}}{k\cdot \cancel{2}^k} - \frac{1}{(k+1)\cdot 2^k} \qquad 2^k = \cancel{2}\cdot 2^{k-1}$$

$$= \frac{1}{k\cdot 2^{k-1}} - \frac{1}{(k+1)\cdot 2^k}$$

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k\cdot 2^{k-1}} - \frac{1}{(k+1)\cdot 2^k}$$

$$= \frac{1}{1\cdot 2^0} - \cancel{\frac{1}{2\cdot 2^1}} + \cancel{\frac{1}{2\cdot 2^1}} - \cancel{\frac{1}{3\cdot 2^2}} + \cancel{\frac{1}{3\cdot 2^2}}$$

$$-\frac{1}{4\cdot 2^3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot 2^{n-1}} - \frac{1}{(n+1)\cdot 2^n}$$

$$= 1 - \frac{1}{(n+1)\cdot 2^n} \quad \blacksquare$$

3. Calcule $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^4}{n^3-1}-\frac{n^3}{n^2+n+1}\right)$.

4. Sea a_n una sucesión que satisface la siguiente desigualdad

$$\frac{6\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1} \leqslant a_n \leqslant \frac{12n-2}{2n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Calcule $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n}$.

Notemos que: $\lim_{n\to\infty} \frac{6\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1} = 6$

$\lim_{n\to\infty} \frac{12n-2}{2n} = 6$

Por teo. del Sandwich $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 6$

Luego, $\lim_{n\to\infty} 1/a_n = \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} a_n} = \frac{1}{6}$

pq $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$

5. Considere la sucesión definida por:

$$a_1 = 3\,, \qquad a_{n+1} = \frac{1+a_n}{2}\,.$$

a) Pruebe por inducción que $(\forall\, n \in \mathbb{N})(a_n > 1)$

b) Pruebe por inducción que $(\forall\, n \in \mathbb{N})(a_{n+1} < a_n)$

c) Pruebe que a_n es convergente y encuentre su límite.

c) Por la parte a) $1 < a_n \quad \forall n$

y por parte b) $a_{n+1} < a_n \quad \forall n$

$$\Rightarrow a_n < a_1 = 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

es decir, $1 < a_n < 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Como la sucesión es monotona y acotada es convergente.

Sea $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ por la recursión sabemos que

$$a_{n+1} = \frac{1+a_n}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$n \to \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+a_n}{2}$$

$$\Leftrightarrow L = \frac{1+L}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2L = 1 + L \quad | -L$$

$\Leftrightarrow L = 1$ ∎