2. Demuestre que la sucesión definida por

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + 6}{2} \text{ para } n > 1$$

es convergente. Calcule su límite.

En ayudantía demostramos que la sucesión es creciente y acotada, por lo tanto, convergente.

Sea $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ (que existe por lo que demostramos) por la recursión de la formula sabemos que:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + 6}{2} \quad \forall\, n \geq 1.$$

Cuando $n \longrightarrow \infty$ se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n + 6}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\lim_{n\to\infty} a_n + 6 \right)$$

$$\Rightarrow \quad L = \frac{1}{2}(L + 6) \quad \backslash \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow 2L = L + 6 \Rightarrow L = 6$$ (por esto elegí 6 como cota superior en ayudantía)

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = b$

Notemos que usamos que $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = L$.

(cuando $n \to \infty$, $n+1 \to \infty$, las sucesiones convergen a lo mismo).

3. Demuestre que la sucesión dada por

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt{2\sqrt{2}}, \quad \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \quad \ldots$$

es convergente. Calcule su límite.

Seguimos los mismos pasos del ejercicio pasado. Para ver que la sucesión es convergente, demostramos que es monotona y acotada.

Monotona: Para saber si la sucesión es monotona creciente o decreciente evaluamos sus terminos.

Ya vimos en una ayudantía pasada que la sucesión está dada por la recursión:

$a_1 = \sqrt{2} \qquad a_{n+1} = \sqrt{2\,a_n} \quad \forall\, n \geq 1.$

Luego, $a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}$

Se tiene que $a_1 < a_2 \Leftrightarrow \sqrt{2} < \sqrt{2\sqrt{2}} \quad |()^2$

$\Leftrightarrow 2 < 2\sqrt{2} \quad | \cdot \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 1 < \sqrt{2} \quad |()^2$

$\Leftrightarrow 1 < 2$ ✓

Como lo última es verdad se tiene que $a_1 < a_2$

Veamos un termino más, $a_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$

$a_2 < a_3 \Leftrightarrow \sqrt{2\sqrt{2}} < \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} \quad |()^2$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2} < 2\sqrt{2\sqrt{2}} \quad | \cdot \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2} < \sqrt{2\sqrt{2}}$ ✓

Esto último es verdad por la parte anterior.

De esta manera, vemos que la sucesión parece ser creciente, así que demostremos esto.

p d: $a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Por inducción: Caso base: $a_1 < a_2$ ✓

Paso inductivo: Supongamos que $a_{n-1} < a_n$ y queremos ver que $a_n < a_{n+1}$. Notemos que:

$$a_{n-1} < a_n \iff 2a_{n-1} < 2a_n \quad | \sqrt{}$$

$$\iff \sqrt{2a_{n-1}} = a_n < a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$$

$\therefore$ se tiene lo pedido y la sucesión es monotona creciente.

Acotada. Como la sucesión es creciente se tiene que:

$$\sqrt{2} = a_1 \leq a_n \quad \forall n$$

Ahora nos falta encontrar una cota superior.

- Antes de encontrar la cota superior, supongamos que ya la tenemos, es decir, demostramos que la sucesión es monotona, acotada y, por teorema visto en clases, convergente. Calculemos su límite.

Sea $L = \lim_{n\to\infty} a_n$, por la recursión:

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n} \quad \forall n \geq 1$$

Haciendo $n \to \infty$:

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2\,a_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{2}\cdot\sqrt{a_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{2}\cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} \quad (*)$$

$$= \sqrt{2}\cdot\sqrt{L}$$

(*) Ejercicio: Demostrar que si $\lim_{n\to\infty} a_n = L > 0$ (con $a_n \geq 0\ \forall n$) $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{L}$

Luego, $L = \sqrt{2}\cdot\sqrt{L} \quad \backslash\,()^2$

$\Leftrightarrow L^2 = 2L$

$\Leftrightarrow L^2 - 2L = 0$

$\Leftrightarrow L = 0$ o $L = 2$

Como sabemos que $a_n \geq a_1 = \sqrt{2} > 0$ entonces $L = 2$.

Notemos que:

$$\sqrt{2} = a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < L$$

es decir, la sucesión crece hasta su límite, por lo tanto, $L = 2$ es un buen candidato a cota superior.

Completando la dem. de que está acotada.

pd: $a_n < 2 \quad \forall\, n \geq 1$.

Por inducción: Caso base $a_1 = \sqrt{2} < 2 \Leftrightarrow 2 < 4$ ✓

Supongamos que $a_n < 2$, queremos ver que $a_{n+1} < 2$.

$$a_n < 2 \quad | \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow 2a_n < 4 \quad | \sqrt{\ }$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2a_n} = a_{n+1} < 2$$

∴ se tiene lo pedido

De esta manera, se tiene que la sucesión está acotada por: $\sqrt{2} \leq a_n \leq 2 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$. ☒

4. Calcule el siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=\#}^{2n} \frac{1}{k^2}$$

ojo

$n+1$

Primero veamos que es la sucesión:

$$a_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2} = \overbrace{\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+n-1)^2} + \frac{1}{(n+n)^2}}^{\text{son } n \text{ terminos}}$$

Ej: $a_1 = \frac{1}{2^2}$, $a_2 = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}$

Las únicas herramientas que tenemos para calcular límites son: alg. de límites, acotada y convergente a 0 y teo. del sandwich

Los primeros dos no parecen funcionar así que probemos con la última:

Notemos que para todo $K = 1, 2, _, n$ se tiene que

$$\frac{1}{(2n)^2} \leq \frac{1}{(n+k)^2} \leq \frac{1}{n^2}$$ (Les recomiendo que lo verifiquen)

(recordar, si el denominador es mas grande, la fracción es menor y si es mas pequeño, la fracción es mayor)

Es decir, $$\frac{1}{(2n)^2} \leq \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{1}{(2n)^2} \leq \frac{1}{(n+2)^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{(2n)^2} \leq \frac{1}{(2n)^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

Sumando estas desigualdades:

$$\Rightarrow \frac{1}{(2n)^2} + \frac{1}{(2n)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \leq a_n \leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

Notemos que:

$$\underbrace{\frac{1}{(2n)^2} + \frac{1}{(2n)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2}}_{n \text{ veces}} = \frac{n}{4n^2} = \frac{1}{4n}$$

$$\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^2} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4n} \leq a_n \leq \frac{1}{n}$$

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, por teo. del

Sandwich $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. ∎