1. Resuelva las siguientes ecuaciones:

$a)$ $\exp(x) = \exp(-x)$

Sol: Recordemos que $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ está dada por

$\exp(x) = e^x$ donde $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \in \mathbb{R}$.

- Esta función es inyectiva y $Rec(e^x) = \mathbb{R}^+$

De esta manera, podemos definir su función inversa:

$$\exp^{-1} := \ln : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \ln(x)$$

Como es la función inversa de la exponencial, se tiene:

$$\ln \circ \exp(x) = \ln(e^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad (*)$$

$$\exp \circ \ln(x) = e^{\ln(x)} = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

o escrito de otra manera:

$$\ln(x) = y \iff e^y = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad (*)$$

(*) es la propiedad más importante del ln y la exponencial.

Ahora para resolver el ejercicio lo podemos hacer de dos maneras distintas:

i) Como sabemos que la exponencial es inyectiva

$$\Rightarrow \quad e^x = e^{-x} \Rightarrow x = -x \quad | + x$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 0.$$

ii) Podemos aplicar el logaritmo a ambos lados (con esto me refiero al hecho de que si f es una función, entonces si $x = y \Rightarrow f(x) = f(y)$).

$$\Rightarrow \quad e^x = e^{-x} \quad | \ln$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln(e^x) = \ln(e^{-x}) \quad | \text{ usando } (*)$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -x$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 0$$

Voy a usar ambos metodos para que se acostumbren.

b) $(\exp(x))^{10} = 2\exp(2x)$

Sol:

$(e^x)^{10} = 2\ e^{2x}$ | usando prop. de exponencial

$\Leftrightarrow \quad e^{10x} = 2 \cdot e^{2x}$

Para poder ocupar la injectividad de la exp. deberíamos tener ambos lados de la ec. en la misma base, es decir, buscamos $y \in \mathbb{R}$ tal que $e^y = 2$.

(*)
$\Rightarrow \quad y = \ln 2$

Es decir, $e^{\ln 2} = 2$, luego:

$$e^{10x} = 2 \cdot e^{2x} \Leftrightarrow e^{10x} = e^{\ln 2} \cdot e^{2x}$$

$$= e^{\ln 2 + 2x}$$

Usando la injectividad de la exponencial:

$\Rightarrow \quad 10x = \ln 2 + 2x \quad | -2x$

$\Leftrightarrow \quad 8x = \ln 2 \quad | \cdot 1/8$

$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\ln 2}{8}$ ∎

- Ahora hagamoslo aplicando ln a ambos lados.

$$e^{10x} = 2 \cdot e^{2x} \quad | \cdot \ln$$

$$\Rightarrow \ln e^{10x} = \ln(2 \cdot e^{2x}) = \ln 2 + \ln e^{2x} \quad | \text{ prop. de ln.}$$

$$\Leftrightarrow 10x = \ln 2 + 2x$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln 2}{8}$$ ■

c) $5^x - 25^x = -6$

Sol: $5^x - 25^x = -6 \Leftrightarrow 5^x - (5^2)^x = -6$

$$\Leftrightarrow 5^x - (5^x)^2 = -6$$

Hagamos un cambio de variable, sea $y = 5^x$, entonces

$$5^x - (5^x)^2 = -6 \Leftrightarrow y - y^2 = -6$$

$$\Leftrightarrow y^2 - y - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y-3)(y+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 3 \text{ o } y = -2$$

$$\Leftrightarrow 5^x = 3 \text{ o } 5^x = -2$$

Como $\text{Rec}(a^x) = \mathbb{R}^+ \Rightarrow 5^x = -2$ no puede pasar.

$\Rightarrow 5^x - (5^x)^2 = -6 \Leftrightarrow 5^x = 3 \quad | \log_5$

$\Leftrightarrow \log_5 5^x = x = \log_5 3$

$\therefore$ La solución es $x = \log_5 3$

d) $x^2 2^x - 2^x = 0$

$x^2 \cdot 2^x - 2^x = 0 \Leftrightarrow 2^x (x^2 - 1) = 0$

$\Leftrightarrow 2^x = 0 \text{ o } x^2 - 1 = 0$

Como $\text{Rec}(a^x) = \mathbb{R}^+$, $2^x = 0$ no tiene solución.

$\Rightarrow x^2 \cdot 2^x - 2^x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = \pm 1$ ∎

2. Expanda las siguientes expresiones:

a) $\log_5 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

Sol: Por propiedades de los exponentes

$$\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{1/2}$$

Recordamos las propiedades de los logaritmos:

i) $\log(x \cdot y) = \log x + \log y$

ii) $\log x^y = y \log x$

(da lo mismo la base del logaritmo)

Notemos que por i)

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log\left(x \cdot y^{-1}\right) = \log(x) + \log y^{-1}$$
$$= \log x - \log y$$

Luego:

$$\log_5 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \log_5 \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2} \log_5 \frac{x-1}{x+1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\log_5(x-1) - \log_5(x+1)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\log_5(x-1) - \frac{1}{2}\log_5(x+1)$$

b) $\log \sqrt{x\sqrt{y\sqrt{z}}}$

$$\sqrt{x\sqrt{y\sqrt{z}}} = \left(x\left(y\left(z\right)^{1/2}\right)^{1/2}\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \log\sqrt{x\sqrt{y\sqrt{z}}} = \log\left(x\left(y\left(z\right)^{1/2}\right)^{1/2}\right)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2}\log x\left(y\cdot\left(z\right)^{1/2}\right)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\log x + \log\left(y\cdot\left(z\right)^{1/2}\right)^{1/2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\log x + \frac{1}{2}\log y\cdot\left(z\right)^{1/2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\log x + \frac{1}{2}\left(\log y + \frac{1}{2}\log z\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\log x + \frac{1}{4}\log y + \frac{1}{8}\log z$$

3. Combine las siguientes expresiones:

a) $4\log x - \frac{1}{3}\log(x^2+1) + 2\log(x-1)$

$$4\log x - \frac{1}{3}\log\left(x^2+1\right) + 2\log\left(x-1\right)$$

$$= \log x^4 - \log\left(\left(x^2+1\right)^{1/3}\right) + \log\left(\left(x-1\right)^2\right)$$

$$= \log\left(\frac{x^4}{(x^2+1)^{1/3}}\right) + \log((x-1)^2)$$

$$= \log\left(\frac{x^4 \cdot (x-1)^2}{(x^2+1)^{1/3}}\right)$$

$b)$ $\ln 5 + 2\ln x + 3\ln(x^2+5)$

$$\ln 5 + 2\ln x + 3\ln(x^2+5)$$

$$= \ln 5 + \ln x^2 + \ln((x^2+5)^3)$$

$$= \ln(5 \cdot x^2) + \ln((x^2+5)^3)$$

$$= \ln(5 \cdot x^2 (x^2+5)^3)$$