2. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ con $ad \neq bc$. Demuestre que la función $f : \mathbb{R} \setminus \{d/c\} \to \mathbb{R} \setminus \{b/a\}$ definida por

$$\frac{ax - b}{cx - d}$$

es biyectiva.

Sol: Recordemos que una función es biyectiva si y solo si es inyectiva y sobreyectiva.

pd: f es inyectiva

Queremos ver que para todo $x_1, x_2 \in Dom\, f = \mathbb{R} \setminus \{d/c\}$ si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $x_1 = x_2$. Veamos que:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{ax_1 - b}{cx_1 - d} = \frac{ax_2 - b}{cx_2 - d} \quad \Big| \cdot (cx_1 - d)\cdot(cx_2 - d)$$

$$\Leftrightarrow (ax_1 - b)(cx_2 - d) = (ax_2 - b)\cdot(cx_1 - d)$$

$$\Leftrightarrow acx_1x_2 - adx_1 - bcx_2 + bd = acx_2x_1 - adx_2 - bcx_1 + bd$$

$$\Leftrightarrow -adx_1 - bcx_2 = -adx_2 - bcx_1 \quad \Big| + bcx_1 + bcx_2$$

$$\Leftrightarrow bcx_1 - adx_1 = bcx_2 - adx_2$$

$$\Leftrightarrow x_1(bc - ad) = x_2(bc - ad)$$

Como $bc \neq ad$ por enunciado, entonces $bc - ad \neq 0$ y

podemos dividir esta última ecuación por $bc - ad$ y obtenemos

$\Leftrightarrow x_1 = x_2$

Por lo tanto, f es inyectiva.

pd: f es sobreyectiva.

Queremos ver que para todo $y \in \mathbb{R} \setminus \{a/c\}$ existe un $x \in \mathbb{R} \setminus \{d/c\}$ tal que $f(x) = \frac{ax - b}{cx - d} = y$, es decir, dado un $y \in \mathbb{R} \setminus \{a/c\}$ debemos encontrar tal x.

Sea $y \in \mathbb{R} \setminus \{a/c\}$, luego existe tal x si y solo si

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{ax - b}{cx - d} = y \quad | \cdot (cx - d)$$ notamos que $x \neq d/c$

$$\Leftrightarrow ax - b = y \cdot (cx - d)$$

$$\Leftrightarrow ax - b = cxy - dy \quad | + b - cxy$$

$$\Leftrightarrow ax - cxy = b - dy$$

$$\Leftrightarrow x(a - cy) = b - dy \quad | \cdot \frac{1}{a - cy}$$ como $y \neq a/c$, $a - cy \neq 0$.

$$\Leftrightarrow x = \frac{b - dy}{a - cy}$$

Es decir, $f(x) = y \iff x = \dfrac{b - dy}{a - cy}$.

Ustedes pueden verificar que efectivamente

$$f\left(\frac{b-dy}{a-cy}\right) = y \quad \text{y} \quad \frac{b-dy}{a-cy} \in \mathbb{R} \setminus \{a/c\}.$$

$\therefore$ La función es sobreyectiva.

Como es sobreyectiva e inyectiva entonces es biyectiva.

Notemos que para ver la sobreyectividad calculamos la inversa, que está dada por:

$$f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{a/c\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{b/d\}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{b - dx}{a - cx}$$

para ver que es efectivamente la inversa deben verificar que

$$f^{-1} \circ f(x) = x \quad \text{y} \quad f \circ f^{-1}(x) = x$$

Y importante!!

1. Sea $f : (5, \infty) \to B$ dada por $f(x) = 1 + \frac{1}{x^2-9}$.

   a) Determine B para que f sea sobreyectiva.

   b) Pruebe que f es inyectiva.

   c) Calcule f^{-1} e identifique su dominio.

a) Para que f sea sobreyectiva se tiene que tener que

$B = \text{Rec } f = \{ y \in \mathbb{R} : \exists\, x \in (5, \infty) \text{ tal que } f(x) = y \}$

entonces, veamos cual es el recorrido de f.

Sea $x \in (5, \infty)$, entonces

$$f(x) = y \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x^2-9} = y \overset{(*)}{} \quad | -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2-9} = y - 1 \quad | ()^{-1} \text{ invirtiendo}$$

(se puede pq $(*) \Rightarrow y > 1$)

$$\Leftrightarrow x^2 - 9 = \frac{1}{y-1} \quad | +9$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{y-1} + 9 \quad | \sqrt{} \quad \left(\frac{1}{y-1} + 9 \geq 0 \right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2} = |x| = x = \sqrt{\frac{1}{y-1} + 9}$$

$|x| = x$ pq $x \in (5, \infty)$

Ahora como $x \in (5, \infty)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{y-1} + 9} \in (5, \infty)$$

$$\Leftrightarrow 5 < \sqrt{\frac{1}{y-1} + 9} \quad \backslash ()^2$$

$$\Leftrightarrow 25 < \frac{1}{y-1} + 9 \quad \backslash -9 \quad (\text{es} > 0 \text{ por lo que podemos sacar la raíz})$$

$$\Leftrightarrow 16 < \frac{1}{y-1} \quad \backslash ()^{-1} \quad (**)$$

Acá se usó que $0 < x < y \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$

$$\Leftrightarrow 0 < y - 1 < \frac{1}{16} \quad \backslash +1$$

$$\Leftrightarrow 1 < y < \frac{1}{16} + 1 = \frac{17}{16}$$

Es decir, probamos que

$$f(x) = y \Leftrightarrow 1 < y < \frac{17}{16}$$

Luego, $\text{Rec } f = (1, \frac{17}{16})$ $\left(1 < \frac{17}{16} \Leftrightarrow 16 < 17\right)$

$\therefore$ para que f sea sobre $B = (1, \frac{17}{16})$

b) pd: f es injectiva

Sean $x_1, x_2 \in (5, \infty)$.

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \cancel{1} + \frac{1}{x_1^2 - 9} = \cancel{1} + \frac{1}{x_2^2 - 9} \quad | -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x_1^2 - 9} = \frac{1}{x_2^2 - 9} \quad | \ ()^{-1} \quad x_1, x_2 \neq \pm 3$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 - \cancel{9} = x_2^2 - \cancel{9} \quad | + 9$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2 \quad | \sqrt{\ }$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x_1^2} = |x_1| = x_1 = x_2 = |x_2| = \sqrt{x_2^2}$$

pq $x_1, x_2 > 0$.

$\therefore$ f es injectiva

c) f^{-1} la obtuvimos en la parte a)

$$f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1}{x-1} + 9}$$

y $\text{Dom } f^{-1} = \text{Rec } f = B = \left(1, \frac{17}{16}\right)$

se puede verificar que $f \circ f^{-1}(x) = x = f^{-1} \circ f(x)$ ■