Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Primer Semestre 2026

Introducción al Álgebra y Geometría - MAT1207
Interrogación N°8

Pregunta Nº1. Considere las siguientes rectas:

$$\mathcal{L}_1 : x + 2y + 4 = 0\,,$$
$$\mathcal{L}_2 : x - y - 1 = 0\,,$$
$$\mathcal{L}_3 : -x + 2y - 2 = 0\,,$$

las cuales definen el triángulo ABC.

(a) [2 puntos] Determine las coordenadas de los vértices A, B y C del triángulo.

(b) [2 puntos] Calcule el perímetro del triángulo ABC.

(c) [2 puntos] Calcule el área del triángulo ABC.

Solución.

(a) Las coordenadas de los vértices A, B y C del triángulo se obtienen determinando los puntos de intersección entre las rectas $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ y $\mathcal{L}_3$. Resolviendo los sistemas

$$\begin{cases} x + 2y + 4 = 0\,, \\ x - y - 1 = 0\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 4 = 0\,, \\ -x + 2y - 2 = 0\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0\,, \\ -x + 2y - 2 = 0\,, \end{cases}$$

se obtienen, respectivamente, los puntos

$$A = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}\right)\,, \qquad B = \left(-3, -\frac{1}{2}\right)\,, \qquad C = (4, 3)\,.$$

(b) Calculamos directamente:

$$\begin{aligned} P &= \operatorname{dist}(A, B) + \operatorname{dist}(A, C) + \operatorname{dist}(B, C) \\ &= \sqrt{\left(\frac{2}{3} - 3\right)^2 + \left(\frac{5}{3} - \frac{1}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(4 + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(3 + \frac{5}{3}\right)^2} + \sqrt{(4+3)^2 + \left(3 + \frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{14}{3}\left(\sqrt{2} + \sqrt{5}\right)\,. \end{aligned}$$

(C) Considerando al segmento $\overline{AB}$ como base del triángulo, debemos determinar la longitud de la altura del vértice C al segmento $\overline{AB}$; esto equivale a calcular la distancia entre C y la recta $\mathcal{L}_1$:

$$\text{dist}(C, \mathcal{L}_1) = \frac{|4 + 2 \cdot 3 + 4|}{\sqrt{1 + 2^2}} = \frac{14}{\sqrt{5}}\,.$$

Sigue, en base al cálculo realizado en el inciso (b), que:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \text{dist}(C, \mathcal{L}_1) \cdot \text{dist}(A, B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{14}{\sqrt{5}} \cdot \frac{7\sqrt{5}}{6} = \frac{49}{6}\,.$$

Criterio de Corrección (CC) - Pregunta Nº1.

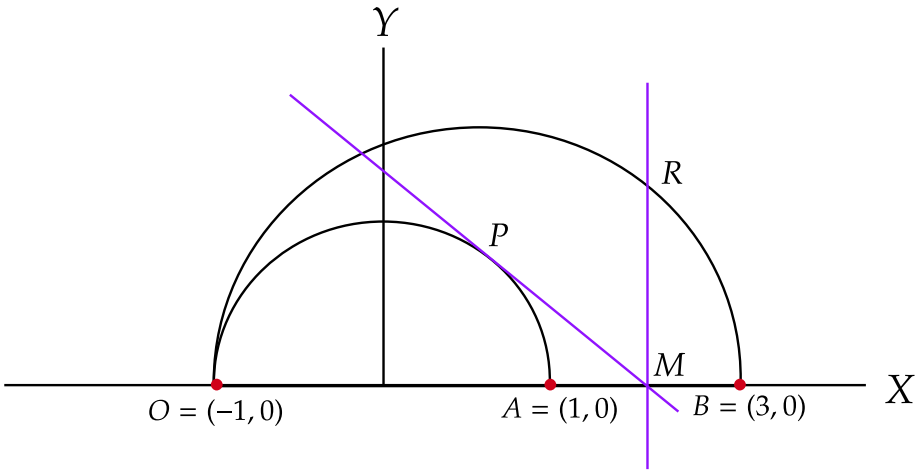
(CC1) [(a)] 2 puntos por calcular correctamente los puntos de intersección entre las rectas $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ y $\mathcal{L}_3$, y explicar que éstos corresponden a los vértices A, B y C del triángulo.

(CC2) [(b)] 2 puntos por calcular correctamente el perímetro del triángulo ABC, como la suma de las distancias entre cada uno de los vértices.

(CC3) [(c)] 1 punto por calcular correctamente la distancia entre C y la recta $\mathcal{L}_1$.

(CC4) [(c)] 1 punto por calcular correctamente el área del triángulo ABC.

Pregunta Nº2. Considere los puntos $O = (-1, 0)$, $A = (1, 0)$ y $B = (3, 0)$. Se construyen dos semicircunferencias cuyos diámetros coinciden con los segmentos $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$, respectivamente. Desde el punto medio M del segmento $\overline{AB}$ se traza una recta perpendicular que intersecta a la circunferencia mayor en el punto R. Luego, desde el punto M se traza la recta tangente a la circunferencia menor, siendo P el punto de tangencia.



El objetivo de este problema es demostrar que los puntos O, P y R son colineales. Para ello:

(a) [2 puntos] Determine las coordenadas del punto R.

(b) [2 puntos] Determine las coordenadas del punto P.

(c) [2 puntos] Concluya que los puntos O, P y R son colineales.

Solución.

(a) Al ser M el punto medio del segmento $\overline{AB}$, sus coordenadas son $M = (2, 0)$. Por su parte, la circunferencia $\mathcal{C}_1$, cuyo diámetro coincide con el segmento $\overline{OB}$, está centrada en el punto $(1, 0)$ y su radio es 2. Luego:

$$\mathcal{C}_1 : (x-1)^2 + y^2 = 4\,.$$

Como M y R tienen las misma abscisa, determinamos la ordenada del punto R reemplezando $x = 2$ en la ecuación de $\mathcal{C}_1$:

$$y^2 = 4 - 1 = 3\,,$$

con lo que:

$$R = (2, \sqrt{3})\,.$$

(b) La circunferencia $\mathcal{C}_2$, cuyo diámetro coincide con el segmento $\overline{OA}$, está centrada en el origen $(0, 0)$ y su radio es 1. Luego:

$$\mathcal{C}_2 : x^2 + y^2 = 1\,.$$

Supongamos que $P = (p, q)$, con $p, q > 0$. La ecuación de la recta tangente a $\mathcal{C}_2$ en P viene dada por $\mathcal{T} : px + qy = 1$. Como $M \in \mathcal{T}$, sigue que:

$$2p = 1 \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{1}{2}\,.$$

Además, como $P \in \mathcal{C}_2$, sigue que:

$$\frac{1}{4} + q^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad q^2 = \frac{3}{4}\,,$$

con lo que:

$$P = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\,.$$

(c) La ecuación de la recta correspondiente al segmento $\overline{PR}$ es:

$$\overline{PR} : y - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 2)\,.$$

Reemplazando $x = -1$ y $y = 0$ en la fórmula anterior se deduce que $O \in \overline{PR}$.

Criterio de Corrección (CC) - Pregunta Nº2.

(CC1) [(a)] 0.5 puntos por determinar las coordenadas del punto M.

(CC2) [(a)] 0.5 puntos por determinar la ecuación de la circunferencia $\mathcal{C}_1$.

(CC3) [(a)] 1 punto por determinar las coordenadas del punto R, en base a la información previa.

(CC4) [(b)] 0.5 puntos por determinar la ecuación de la circunferencia $\mathcal{C}_2$.

(CC5) [(b)] 0.5 puntos por determinar la ecuación de la recta tangente $\mathcal{T}$.

(CC6) [(b)] 1 punto por determinar las coordenadas del punto P, en base a la información previa.

(CC7) [(c)] 1 punto por determinar la ecuación de la recta correspondiente al segmento $\overline{PR}$ (en alternativa, se puede determinar la ecuación de la recta correspondiente a cualquiera de los segmentos $\overline{OP}$ ó $\overline{OR}$).

(CC8) [(c)] 1 punto por comprobar que O pertenece a la recta determinada previamente (en alternativa, por comprobar que P ó R pertenecen a la recta determinada previamente, según corresponda).