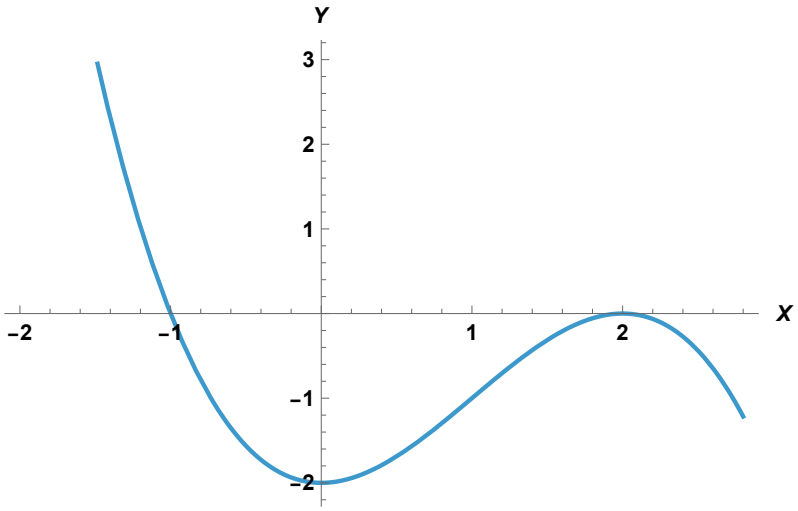
Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Primer Semestre 2026

Introducción al Álgebra y Geometría - MAT1207
Interrogación N°7

Pregunta Nº1.

(a) [3 puntos] Considere el polinomio $P(x) = 3x^4 + 4x^3 - 17x^2 - 6x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Determine todas las raíces de P, factorice completamente P y trace un gráfico cualitativo de P.

(b) [3 puntos] En la siguiente figura se muestra el gráfico de un polinomio $Q \in \mathbb{R}[x]$ de grado 3:



Determine la expresión del polinomio Q.

Solución.

(a) Inmediatamente notamos que $P(x) = x(3x^3+4x^2-17x-6)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, de modo tal que $x = 0$ es raíz de P. Las otras raíces de P corresponderán a las raíces del polinomio $Q(x) \doteq 3x^3+4x^2-17x-6$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Dado que $Q \in \mathbb{Z}[x]$, podemos aplicar el teorema de las raíces racionales para deducir que las únicas posibles raíces racionales de Q han de ser las siguientes:

$$\pm 1\,, \quad \pm 2\,, \quad \pm 3\,, \quad \pm 6\,, \quad \pm\frac{1}{3} \quad \pm\frac{2}{3}\,.$$

Por inspección notamos que $Q(2) = 24 + 16 - 34 - 6 = 0$. Posteriormente, realizando la siguiente división de polinomios:

$$\begin{array}{rl} & 3x^3 + 4x^2 - 17x - 6 \quad : \quad x - 2 = 3x^2 + 10x + 3 \\ - & \underline{(3x^3 - 6x^2)} \\ & 10x^2 - 17x - 6 \\ - & \underline{(10x^2 - 20x)} \\ & 3x - 6 \\ - & \underline{(3x - 6)} \\ & 0 \end{array}$$

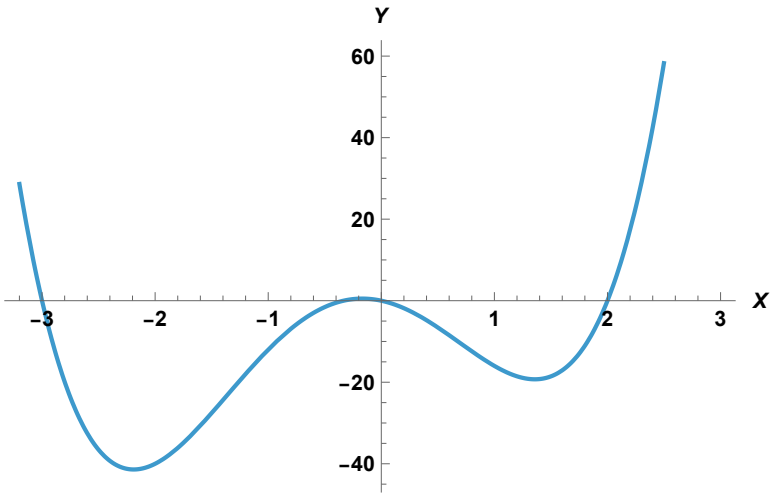
se obtiene la siguiente factorización:

$$Q(x) = (x-2)(3x^2+10x+3) = 3(x-2)(x+3)\left(x+\frac{1}{3}\right) \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Por ende, las raíces de P son $-3, -1/3, 0, 2$, con la siguiente factorización:

$$P(x) = 3x(x-2)(x+3)\left(x+\frac{1}{3}\right) \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Un gráfico cualitativo de P se muestra a continuación:



(b) Del gráfico de Q se deduce inmediatamente que:

- $x = -1$ es raíz simple de Q;
- $x = 2$ es raíz de multiplicidad par de Q;
- $Q(0) = -2$;
- $\lim_{x\to\pm\infty} Q(x) = \mp\infty$.

Dado que Q es de grado 3, su expresión ha de tener la siguiente forma:

$$Q(x) = -a(x+1)(x-2)^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,, \tag{FQ}$$

para una cierta constante $a > 0$ que puede determinarse de la condición $Q(0) = -2$. Es decir.

$$-2 = Q(0) = -4a \qquad \Longrightarrow \qquad a = \frac{1}{2}\,.$$

En conclusión: $Q(x) = -\frac{1}{2}(x+1)(x-2)^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Criterio de Corrección (CC) - Pregunta Nº1.

(CC1) [(a)] 1 punto por hallar las raíces $x = 0$ y $x = 2$ de P, apelando al teorema de las raíces racionales.

(CC2) [(a)] 1 punto por efecutar la división de polinomios y hallar las demás raíces de P (que son -3 y $-1/3$).

(CC3) [(a)] 1 punto por escribir la factorización final de P.

(CC4) [(b)] 1 punto por justificar, en base al gráfico de Q, las cuatro propiedades expuestas: $x = -1$ es raíz simple, $x = 2$ es raíz de multiplicidad par, $Q(0) = -2$, $\lim_{x \to \pm\infty} Q(x) = \mp\infty$.

(CC5) [(b)] 1 punto por escribir la expresión (FQ).

(CC6) [(b)] 1 punto por calcular el valor de a y escribir la fórmula final para Q.

Pregunta Nº2. Considérese el polinomio $P(z) = z^4 - 3z^3 + 2z^2 + z + 5$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

(a) [2 puntos] Verifique que $z = 2 + i$ es raíz de P

(b) [4 puntos] Factorice completamente el polinomio P sobre $\mathbb{C}$.

Solución.

(a) Notemos que:

$$(2+i)^2 = 3 + 4i\,,$$
$$(2+i)^3 = (2+i)(2+i)^2 = (2+i)(3+4i) = 2 + 11i\,,$$
$$(2+i)^4 = (2+i)(2+i)^3 = (2+i)(2+11i) = -7 + 24i\,.$$

Por ende:

$$P(2+i) = -7 + 24i - 3(2+11i) + 2(3+4i) + 2 + i + 5 = 0\,.$$

(b) Como $P \in \mathbb{R}[x]$ y $2 + i$ es raíz de P, sigue que $2 - i$ (el conjugado de $2 + i$) también es raíz de P. Por ende, P ha de ser divisible por el siguiente polinomio:

$$(z - (2+i))(z - (2-i)) = z^2 - 2\mathrm{Re}[2+i]z + |2+i|^2 = z^2 - 4z + 5\,.$$

Realizamos la siguiente división de polinomios:

$$\begin{array}{rl} & z^4 - 3z^3 + 2z^2 + z + 5 \quad : \quad z^2 - 4z + 5 = z^2 + z + 1 \\ - & \underline{(z^4 - 4z^3 + 5z^2)} \\ & z^3 - 3z^2 + z + 5 \\ - & \underline{(z^3 - 4z^2 + 5z)} \\ & z^2 - 4z + 5 \\ - & \underline{(z^2 - 4z + 5)} \\ & 0 \end{array}$$

Por ende, $P(z) = (z^2 - 4z + 5)(z^2 + z + 1)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Resolviendo la ecuación cuadrática

$$z^2 + z + 1 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad z \in \left\{ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\,, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\}\,,$$

se obtiene la siguiente factorización total de P en $\mathbb{C}$:

$$P(z) = (z - 2 - i)(z - 2 + i)\left(z + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(z + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \qquad \forall z \in \mathbb{C}\,.$$

Criterio de Corrección (CC) - Pregunta Nº2.

(CC1) [(a)] 1 punto por calcular $(2+i)^2$, $(2+i)^3$ y $(2+i)^4$.

(CC2) [(a)] 1 punto por verificar, en base al cálculo anterior, que $P(2+i)=0$.

(CC3) [(b)] 1 punto por justificar que $2-i$ también es raíz de P.

(CC4) [(b)] 1 punto por explicar que P es divisible por z^2-4z+5.

(CC5) [(b)] 1 punto por efectuar correctamente la división $P(z):z^2-4z+5$.

(CC6) [(b)] 1 punto por resolver la ecuación cuadrática $z^2+z+1=0$ y entregar la factorización completa de P en $\mathbb{C}$.