Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Primer Semestre 2026

Introducción al Álgebra y Geometría - MAT1207
Interrogación N°6

Pregunta Nº1.

(a) [3 puntos] Determine la parte real e imaginaria de $(\sqrt{3}-i)^{10}$.

(b) [3 puntos] Resuelva la ecuación $(z+i)^2 = (\sqrt{3}+i)^3$ en la variable compleja $z \in \mathbb{C}$, expresando las soluciones en forma binomial o cartesiana.

Solución.

(a) Lo primero que debemos hacer es representar el número complejo $\sqrt{3}-i$ en forma polar. Notando que

$$|\sqrt{3}-i| = \sqrt{3+1} = 2 \qquad \text{y} \qquad \arg(\sqrt{3}-i) = \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 2\pi = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}\,,$$

podemos escribir

$$\sqrt{3}-i = 2\exp\left(\frac{11\pi i}{6}\right).$$

Por ende,

$$\begin{aligned}(\sqrt{3}-i)^{10} &= \left[2\exp\left(\frac{11\pi i}{6}\right)\right]^{10} \\ &= 2^{10}\exp\left(\frac{55\pi i}{3}\right) \\ &= 2^{10}\exp\left(\frac{\pi i}{3} + 18\pi i\right) \\ &= 2^{10}\exp\left(\frac{\pi i}{3}\right) \\ &= 2^{10}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right),\end{aligned}$$

por lo que

$$\mathrm{Re}[\sqrt{3}-i] = 2^9 \qquad \text{y} \qquad \mathrm{Im}[\sqrt{3}-i] = 2^9\sqrt{3}\,.$$

(b) Comenzamos expresando, en forma polar, el número complejo $\sqrt{3}+i$:

$$\sqrt{3}+i = 2\exp\left(\frac{\pi i}{6}\right),$$

con lo que

$$(\sqrt{3}+i)^3 = 8\exp\left(\frac{\pi i}{2}\right) = 8i\,.$$

Por ende, la ecuación propuesta se escribe equivalentemente como

$$(z+i)^2 = 8\exp\left(\frac{\pi i}{2}\right), \qquad (*)$$

esto es, $z+i$ corresponde a la raíz cuadrada de $8i$. Sigue que

$$z+i \in \left\{2\sqrt{2}\exp\left(\frac{\pi i}{4}\right),\ 2\sqrt{2}\exp\left(\frac{5\pi i}{4}\right)\right\}$$

$$\iff z+i \in \left\{2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right),\ -2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$

$$\iff z+i \in \{2+2i\,,\ -2-2i\}\,.$$

En conclusión,

$$z \in \{2+i\,,\ -2-3i\}\,.$$

Criterio de Corrección (CC) - Pregunta Nº1.

(CC1) [(a)] 1 punto por expresar correctamente el número complejo $\sqrt{3}-i$ en forma polar.

(CC2) [(a)] 1 punto por expandir la expresión $(\sqrt{3}-i)^{10}$ en modo que sea posible identificar su parte real e imaginaria.

(CC3) [(a)] 1 punto por determinar correctamente la parte real e imaginaria de $(\sqrt{3}-i)^{10}$.

(CC4) [(b)] 1 punto por escribir la forma equivalente (*) de la ecuación propuesta.

(CC5) [(b)] 1 punto por calcular las raíces cuadradas de de $8i$

(CC6) [(b)] 1 punto por escribir correctamente el conjunto solución final, en forma binomial o cartesiana.

Pregunta Nº2. Sea $z \in \mathbb{C}$ un número complejo.

(a) [3 puntos] Suponiendo que $|z+1| = |z-1|$, demuestre que $\mathrm{Re}[z] = 0$.

(b) [3 puntos] Suponiendo que $z \neq 0$ y que

$$\frac{z}{\overline{z}} \in \mathbb{R}\,,$$

demuestre que, o bien $z \in \mathbb{R}$, o bien z es un número imaginario puro.

Solución.

(a) Escribamos $z = a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Dado que $|z+1| = |z-1|$, se deduce lo siguiente:

$$\begin{aligned} |z+1|^2 = |z-1|^2 &\iff |(a+1)+ib|^2 = |(a-1)+ib|^2 \\ &\iff (a+1)^2 + b^2 = (a-1)^2 + b^2 \\ &\iff a^2 + 2a + 1 + b^2 = a^2 - 2a + 1 + b^2 \\ &\iff 4a = 0 \\ &\iff a = 0\,, \end{aligned}$$

esto es, $\mathrm{Re}[z] = 0$.

(b) Escribamos $z = a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a^2 + b^2 > 0$. Sigue que:

$$\frac{z}{\overline{z}} = \frac{a+ib}{a-ib} = \frac{(a+ib)^2}{(a-ib)(a+ib)} = \frac{a^2 - b^2 + 2abi}{a^2+b^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} + \frac{2ab}{a^2+b^2}i\,.$$

Dado que $\dfrac{z}{\overline{z}} \in \mathbb{R}$, se deduce que:

$$\mathrm{Im}\left[\frac{z}{\overline{z}}\right] = 0 \iff \frac{2ab}{a^2+b^2} = 0 \iff ab = 0 \iff a = 0 \ \vee \ b = 0\,.$$

Por ende, o bien $z \in \mathbb{R}$, o bien z es un número imaginario puro.

Criterio de Corrección (CC) - Pregunta Nº2.

(CC1) [(a)] 1 punto por expresar z en forma cartesiana.

(CC2) [(a)] 1 punto por demostrar que, partiendo de la identidad $|z+1| = |z-1|$, se deduce que $a = 0$.

(CC3) [(a)] 1 punto por concluir la demostración: como $a = 0$, entonces $\mathrm{Re}[z] = 0$.

(CC4) [(b)] 1 punto por expresar z en forma cartesiana.

(CC5) [(b)] 1 punto por determinar la parte real e imaginaria de $\dfrac{z}{\overline{z}}$.

(CC6) [(b)] 1 punto por concluir la demostración: como $ab = 0$, entonces, o bien $z \in \mathbb{R}$, o bien z es un número imaginario puro.