Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Primer Semestre 2026

Introducción al Álgebra y Geometría - MAT1207
Interrogación N°5

Pregunta Nº1.

(a) [3 puntos] Dados $a, b \in \mathbb{R}$ cualesquiera, demuestre la siguiente identidad:

$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

(b) [3 puntos] Utilice el resultado del inciso (a) para determinar las soluciones $x \in \mathbb{R}$ de la siguiente ecuación:

$$1 + \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0\,.$$

Solución.

(a) Recordemos que para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se tienen las siguientes identidades:

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) \qquad \text{y} \qquad \cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)\,.$$

Sumando ambas identidades obtenemos

$$2\cos(x)\cos(y) = \cos(x+y) + \cos(x-y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}\,. \tag{ID}$$

El resultado deseado se obtiene aplicando la igualdad (ID) al caso en que $x = \dfrac{a+b}{2}$ y $y = \dfrac{a-b}{2}$.

(b) Dado $x \in \mathbb{R}$, aplicamos la identidad demostrada en el inciso (a) para deducir lo siguiente:

$$\begin{aligned} 1 + \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) &= [\cos(0) + \cos(2x)] + [\cos(x) + \cos(3x)] \\ &= 2(\cos(x))^2 + 2\cos(x)\cos(2x) \\ &= 2\cos(x)\,[\cos(x) + \cos(2x)] \\ &= 4\cos(x)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x}{2}\right). \end{aligned} \tag{E1}$$

Sigue que:

$$\begin{aligned} & 1 + \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0 \\ \iff \quad & \cos(x) = 0 \quad \vee \quad \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \quad \vee \quad \cos\left(\frac{3x}{2}\right) = 0\,. \end{aligned}$$

Recordando que

$$\cos(t) = 0 \quad \iff \quad t = (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{Z}\,,$$

se concluye que el conjunto solución de la ecuación propuesta es:

$$\mathcal{S} = \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{3} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} .$$

Criterio de Corrección (CC) - Pregunta Nº1.

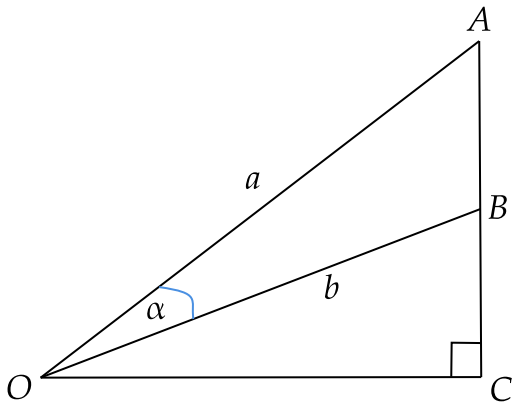
(CC1) [(a)] 3 puntos por demostrar, en forma justificada, la igualdad propuesta (existen distintas formas de hacerlo, no es necesario que se siga el método mostrado en esta pauta).

(CC2) [(b)] 1 punto por aplicar la identidad demostrada en el inciso (a) y re-escribir la ecuación propuesta en la forma (E1) (o en alguna otra forma análoga).

(CC3) [(b)] 1 punto por describir correctamente las soluciones de la ecuación $\cos(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

(CC4) [(b)] 1 punto por escribir correctamente el conjunto solución final.

Pregunta Nº2. En la figura mostrada a continuación, OAC es un triángulo rectángulo en el vértice C, y B es un punto interno del segmento $\overline{AC}$.



Se conoce la longitud de los segmentos $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ (que valen a y b, respectivamente), además del valor $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ del ángulo formado entre ellos. El objetivo de este problema es calcular el largo ℓ del trazo $\overline{OC}$.

(a) [2 puntos] Sea $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ el ángulo determinado por los segmentos $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$. Demuestre la siguiente identidad:

$$\tan(\varphi) = \frac{a\cos(\alpha) - b}{a\,\mathrm{sen}(\alpha)}\,.$$

Indicación: Utilice los triángulos OAC y OBC para obtener dos expresiones para ℓ en función de los datos del problema.

(b) [2 puntos] Si $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $p \in \mathbb{R}$ y $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ son números reales tales que

$$\tan(x) = \frac{p}{q}\,,$$

demuestre que

$$\cos(x) = \frac{|q|}{\sqrt{p^2 + q^2}}\,.$$

(c) [2 puntos] Utilizando los resultados de los incisos (a) y (b), deduzca que

$$\ell = \frac{ab\,\mathrm{sen}(\alpha)}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha)}}\,.$$

Solución.

(a) En el triángulo OAC se tiene la siguiente identidad:

$$\cos(\alpha + \varphi) = \frac{\ell}{a}\,,$$

mientras que en el triángulo OBC se tiene

$$\cos(\varphi) = \frac{\ell}{b}\,.$$

Sigue que

$$b\cos(\varphi) = a\cos(\alpha+\varphi) = a\cos(\alpha)\cos(\varphi) - a\,\mathrm{sen}(\alpha)\,\mathrm{sen}(\varphi)\,,$$

es decir

$$a\,\mathrm{sen}(\alpha)\,\mathrm{sen}(\varphi) = \cos(\varphi)[a\cos(\alpha) - b]\,,$$

de donde se obtiene la identidad requerida, puesto que:

$$\tan(\varphi) = \frac{\mathrm{sen}(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \frac{a\cos(\alpha) - b}{a\,\mathrm{sen}(\alpha)}\,.$$

(b) Dado que $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, se tiene $\cos(x) > 0$. Luego, puesto que

$$\frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)} = \frac{p}{q}\,,$$

se deduce lo siguiente:

$$\frac{p^2}{q^2} = \frac{(\mathrm{sen}(x))^2}{(\cos(x))^2} = \frac{1-(\cos(x))^2}{(\cos(x))^2} = \frac{1}{(\cos(x))^2} - 1\,,$$

o equivalentemente,

$$\frac{1}{(\cos(x))^2} = \frac{p^2+q^2}{q^2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \cos(x) = \frac{|q|}{\sqrt{p^2+q^2}}\,.$$

(b) Del inciso (a) sabemos que:

$$\cos(\varphi) = \frac{\ell}{b} \qquad \text{y} \qquad \tan(\varphi) = \frac{a\cos(\alpha) - b}{a\,\mathrm{sen}(\alpha)}\,.$$

Por ende, podemos aplicar el resultado del inciso (b) y deducir que:

$$\ell = b\cos(\varphi) = \frac{ab\,\mathrm{sen}(\alpha)}{\sqrt{(a\cos(\alpha)-b)^2 + (a\,\mathrm{sen}(\alpha))^2}} = \frac{ab\,\mathrm{sen}(\alpha)}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos(\alpha)}}\,.$$

Criterio de Corrección (CC) - Pregunta Nº2.

(CC1) [(a)] 1 punto por obtener las dos expresiones para ℓ en función de los datos del problema.

(CC2) [(a)] 1 punto por igualar ambas expresiones, y deducir la identidad solicitada.

(CC3) [(b)] 2 puntos por demostrar correctamente la igualdad propuesta (existen distintas formas de hacerlo, no es necesario que se siga el método mostrado en esta pauta).

(CC4) [(c)] 2 puntos por aplicar correctamente los resultados de los incisos (a) y (b), para así obtener la igualdad solicitada.