Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Primer Semestre 2026

Introducción al Álgebra y Geometría - MAT1207
Interrogación N°4

Pregunta Nº1. Sea $a \in \mathbb{R}$ un número dado.

(a) [5 puntos] Calcule el término independiente de x en el desarrollo de la siguiente expresión:

$$(x^3+1)\left(x+\frac{a}{x^2}\right)^9 \tag{E}$$

(b) [1 puntos] Determine los valores de a que garantizan que el desarrollo de (E) no admite un término independiente de x.

Solución.

(a) Gracias al Teorema del Binomio podemos expandir de la siguiente forma:

$$\left(x+\frac{a}{x^2}\right)^9 = \sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}x^{9-k}\left(\frac{a}{x^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}a^k x^{9-3k}\,.$$

Por ende,

$$(x^3+1)\left(x+\frac{a}{x^2}\right)^9 = \sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}a^k x^{12-3k} + \sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}a^k x^{9-3k} \doteq S_1 + S_2\,.$$

El término independiente de x en la sumatoria S_1 se obtiene cuando $12-3k=0$, esto es, $k=4$. El coeficiente asociado es

$$C_1 = \binom{9}{4}a^4 = \frac{9!}{5!\,4!}a^4 = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2}a^4 = 126a^4\,.$$

Por su parte, el término independiente de x en la sumatoria S_2 se obtiene cuando $9-3k=0$, esto es, $k=3$. El coeficiente asociado es

$$C_2 = \binom{9}{3}a^3 = \frac{9!}{6!\,3!}a^3 = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2}a^3 = 84a^3\,.$$

Luego, el término independiente de x en el desarrollo de (E) viene dado por

$$C = C_1 + C_2 = 42a^3(3a+2)\,.$$

(b) Basta determinar los valores de $a \in \mathbb{R}$ tales que

$$42a^3(3a+2)=0 \quad \Longleftrightarrow \quad a=0 \quad \vee \quad a=-\frac{2}{3}\,.$$

Criterio de Corrección (CC) - Pregunta Nº1.

(CC1) [(a)] 2 puntos por expandir correctamente el término $\left(x+\frac{a}{x^2}\right)^9$ de acuerdo al Teorema del Binomio.

(CC2) [(a)] 1 punto por multiplicar (x^3+1) por $\sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}a^k x^{9-3k}$, para así obtener las sumas S_1 y S_2.

(CC3) [(a)] 1 punto por hallar el término independiente de x en la sumatoria S_1.

(CC4) [(a)] 1 punto por hallar el término independiente de x en la sumatoria S_2.

(CC5) [(b)] 1 punto por resolver correctamente la ecuación algebraica $42a^3(3a+2)=0$.

Pregunta Nº2.

(a) [3 puntos] Determine el valor de la siguiente sumatoria:

$$\sum_{k=23}^{111} \left((k-2)^2 - \frac{2^{2k}}{5^k} \right) .$$

(b) [3 puntos] Sea $(a_k)_{k\geq 1} \subset \mathbb{R}$ una sucesión tal que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n(13-3n)}{2} \qquad \forall n \geq 1 .$$

Demuestre, sin utilizar el principio de inducción, que la sucesión $(a_k)_{k\geq 1}$ es aritmética. Determine, además, su término general.

Solución.

(a) Recordando propiedades de la sumatoria, procedemos de la siguiente forma:

$$\sum_{k=23}^{111} \left((k-2)^2 - \frac{2^{2k}}{5^k} \right)$$

$$= \sum_{k=23}^{111} (k-2)^2 - \sum_{k=23}^{111} \frac{2^{2k}}{5^k}$$

$$= \sum_{k=21}^{109} k^2 - \sum_{k=23}^{111} \left(\frac{4}{5}\right)^k \qquad \text{(traslación de índices)}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{109} k^2 - \sum_{k=1}^{20} k^2 \right) - \left(\sum_{k=0}^{111} \left(\frac{4}{5}\right)^k - \sum_{k=0}^{22} \left(\frac{4}{5}\right)^k \right)$$

$$= \left(\frac{109 \cdot 110 \cdot 219}{6} - \frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6} \right) - \left(\frac{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{112}}{1 - \frac{4}{5}} - \frac{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{23}}{1 - \frac{4}{5}} \right) \qquad \text{(sumatorias conocidas)}$$

$$= (109 \cdot 55 \cdot 73 - 70 \cdot 41) - 5 \left(\left(\frac{4}{5}\right)^{23} - \left(\frac{4}{5}\right)^{112} \right) .$$

(b) Poniendo $n = 1$ deducimos inmediatamente que $a_1 = 5$. Luego, para cualquier $n \geq 1$ se tiene:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} a_k - 2\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \\ &= \frac{(n+1)(13-3(n+1))}{2} - n(13-3n) + \frac{(n-1)(13-3(n-1))}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left[(n+1)(10-3n) - 2n(13-3n) + (n-1)(16-3n)\right] \\ &= -3\,, \end{aligned}$$

lo cual demuestra que $(a_k)_{k\geq 1}$ es una sucesión aritmética con diferencia igual a -3. Por ende, su término general viene dado por:

$$a_n = 5 - 3(n-1) = -3n + 8 \qquad \forall n \geq 1\,.$$

Criterio de Corrección (CC) - Pregunta Nº2.

(CC1) [(a)] 3 puntos por calcular correctamente la sumatoria propuesta. La respuesta debe ser justificada, en el sentido que deben haber igualdades intermedias (no es necesario que los alumnos escriban el nombre de la propiedad invocada, o que el valor final de la sumatoria se exprese en forma cerrada).

(CC2) [(b)] 0.5 puntos por calcular correctamente el valor de a_1.

(CC3) [(b)] 1.5 puntos por demostrar, justificadamente, que $a_{n+1} - a_n = -3$ para cualquier $n \geq 1$.

(CC4) [(b)] 0.5 puntos por escribir correctamente el valor del término general a_n, para cualquier $n \geq 1$.