Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Primer Semestre 2026

Introducción al Álgebra y Geometría - MAT1207
Interrogación N°3

Pregunta Nº1. Dado un conjunto universo U, considere los subconjuntos no vacíos $A, B, C, D \subseteq U$.

(a) [3 puntos] Demuestre que

$$A \subseteq C \quad \Longrightarrow \quad A - B = C - [B \cup (C - A)]\,.$$

(b) [3 puntos] Demuestre que

$$(B - A) \subseteq C \quad \Longrightarrow \quad (D - C) \subseteq [(D - B) \cup A]\,.$$

Solución.

(a) Supongamos que $A \subseteq C$. Por álgebra de conjuntos se tiene que

$$\begin{aligned}
C - [B \cup (C - A)] &= C \cap [B \cup (C - A)]^c \quad \text{(caracterización de la diferencia entre conjuntos)} \\
&= C \cap [B^c \cap (C - A)^c] \quad \text{(Leyes de De Morgan)} \\
&= C \cap [B^c \cap (C \cap A^c)^c] \quad \text{(caracterización de la diferencia entre conjuntos)} \\
&= C \cap [B^c \cap (C^c \cup A)] \quad \text{(Leyes de De Morgan)} \\
&= B^c \cap [C \cap (C^c \cup A)] \quad \text{(asociatividad y conmutatividad de la intersección)} \\
&= B^c \cap [(C \cap C^c) \cup (C \cap A)] \quad \text{(distributividad)} \\
&= B^c \cap (\emptyset \cup A) \quad \text{(dado que } A \subseteq C\text{)} \\
&= B^c \cap A \quad \text{(propiedad del conjunto vacío)} \\
&= A - B \quad \text{(conmutatividad y caracterización de la diferencia entre conjuntos).}
\end{aligned}$$

(b) Supongamos que $(B - A) \subseteq C$, por lo que

$$\begin{aligned}
C^c &\subseteq (B - A)^c \quad \text{(propiedad del complemento)} \\
&= (B \cap A^c)^c \quad \text{(caracterización de la diferencia entre conjuntos)} \\
&= A \cup B^c \quad \text{(Leyes de De Morgan y conmutatividad).}
\end{aligned}$$

Por álgebra de conjuntos se tiene que

$$\begin{aligned} D - C &= D \cap C^c \quad \text{(caracterización de la diferencia entre conjuntos)} \\ &\subseteq D \cap (A \cup B^c) \quad \text{(debido a lo demostrado más arriba)} \\ &= (D \cap A) \cup (D \cap B^c) \quad \text{(distributividad)} \\ &\subseteq A \cup (D \cap B^c) \quad \text{(pues } (D \cap A) \subseteq A\text{)} \\ &= A \cup (D - B) \quad \text{(caracterización de la diferencia entre conjuntos)} \\ &= (D - B) \cup A \quad \text{(conmutatividad).} \end{aligned}$$

Criterio de Corrección (CC) - Pregunta Nº1.

(CC1) [(a)] 3 puntos por escribir correctamente la forma equivalente del conjunto $C - [B \cup (C - A)]$. La respuesta debe ser justificada, en el sentido de que deben haber igualdades intermedias (no es necesario que los alumnos escriban el nombre de la propiedad invocada).

(CC2) [(b)] 1 punto por justificar que $C^c \subseteq (A \cup B^c)$ en base a la hipótesis del ejercicio.

(CC3) [(b)] 2 puntos por demostrar, justificadamente, que $(D-C) \subseteq [(D-B) \cup A]$ (al igual que antes, deben haber igualdades e inclusiones intermedias, y no es necesario que los alumnos escriban el nombre de la propiedad invocada).

Pregunta Nº2. [6 puntos] Utilizando la técnica de inducción, demuestre que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}\,.$$

Solución. Se nos pide demostrar, por inducción, que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Caso base: para $n = 1$, debemos verificar que

$$1(1+1) = \frac{1(1+1)(1+2)}{3} \quad \Longleftrightarrow \quad 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3} \quad \Longleftrightarrow \quad 2 = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad V\,.$$

Paso inductivo: supóngase que para un cierto número entero $n \geq 1$ se tiene la igualdad

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}\,. \tag{HI}$$

Debemos ahora demostrar que

$$\sum_{i=1}^{n+1} i(i+1) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}\,. \tag{PI}$$

En efecto, la hipótesis de inducción (HI) implica que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i(i+1) &= (n+1)(n+2) + \sum_{i=1}^{n} i(i+1) \\
&= (n+1)(n+2) + \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \\
&= (n+1)(n+2)\left(1 + \frac{n}{3}\right) \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}\,.
\end{aligned}$$

Conclusión: Por inducción, la igualdad

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

es válida para cualquier número entero $n \geq 1$.

Criterio de Corrección (CC) - Pregunta Nº2.

(CC1) 1 punto por demostrar correctamente el caso base.

(CC2) 2 punto por escribir la hipótesis inductiva (HI) y el paso inductivo (PI) que debe ser demostrado (no es obligatorio que los alumnos utilicen la notación de sumatoria).

(CC3) 3 puntos por demostrar correctamente la tesis (PI), utilizando la hipótesis de inducción (HI).