Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Primer Semestre 2026

Introducción al Álgebra y Geometría - MAT1207
Interrogación N°2

Pregunta Nº1. [6 puntos] Sean $a, b \in \mathbb{R}$ dos números reales.

(a) [3 puntos] Suponiendo que $a \in \mathbb{Q}$ y $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, demuestre que $a + b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(b) [3 puntos] Suponiendo que $a + b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, demuestre que $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, o bien, que $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Solución.

(a) Por contradicción, supóngase que $a + b \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, es decir, que $a + b \in \mathbb{Q}$. Por definición, han de existir dos números enteros $m, n \in \mathbb{Z}$, con $n \neq 0$, tales que

$$a + b = \frac{m}{n}\,.$$

Por hipótesis, sabemos que existen dos números enteros $p, q \in \mathbb{Z}$, con $q \neq 0$, tales que

$$a = \frac{p}{q}\,.$$

Luego,

$$b = \frac{m}{n} - \frac{p}{q} = \frac{mq - np}{nq}\,.$$

Como $mq - np \in \mathbb{Z}$ y $nq \neq 0$, la última igualdad demuestra que $b \in \mathbb{Q}$, lo cual contradice la hipótesis del enunciado. Por ende, $a + b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(b) Definamos las siguientes proposiciones:

$$p : a + b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\,; \qquad q : a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\,; \qquad r : b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\,.$$

Por ende, se pide demostrar la implicancia $p \Rightarrow q \vee r$. Usando la técnica de demostración contra-recíproca, esto equivale a demostrar

$$\overline{(q \vee r)} \Rightarrow \overline{p} \quad \Longleftrightarrow \quad (\overline{q} \wedge \overline{r}) \Rightarrow \overline{p} \quad \text{(Leyes de De Morgan)}.$$

Se tiene que:

$$\overline{p} : a + b \in \mathbb{Q}\,; \qquad \overline{q} : a \in \mathbb{Q}\,; \qquad \overline{r} : b \in \mathbb{Q}\,,$$

y de consecuencia,

$$\overline{q} \wedge \overline{r} \quad \Longleftrightarrow \quad (a \in \mathbb{Q}) \ \wedge \ (b \in \mathbb{Q})\,.$$

Por ende, si se asume que proposición $\overline{q} \wedge \overline{r}$ es verdadera, esto implica que $a, b \in \mathbb{Q}$, y entonces $a + b \in \mathbb{Q}$ (no es necesario demostrar esta última propiedad). Vale decir, se cumple la proposición $\overline{p} : a + b \in \mathbb{Q}$.

Criterio de Corrección (CC) - Pregunta Nº1.

(CC1) [(a)] 3 puntos por demostrar correctamente la propiedad propuesta (no se exige hacerlo por reducción al absurdo).

(CC2) [(b)] 3 puntos por demostrar correctamente la propiedad propuesta (no se exige hacerlo por técnica contrarrecíproca).

Pregunta Nº2.[6 puntos] Considere a $\mathbb{R}$ como conjunto universo. Determine, en cada uno de los siguientes casos, si los conjuntos A y B son iguales. Justifique su respuesta.

(a) [1.5 puntos] $A = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, $\quad B = \{n^2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

(b) [1.5 puntos] $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+1| \geq 2\}$, $\quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid ||x|+1| \geq 2\}$.

(c) [1.5 puntos] $A = \left\{ \dfrac{p}{q} \;\middle|\; p, q \in \mathbb{Z},\ \ q \neq 0 \right\}$, $\quad B = \left\{ \dfrac{p}{q} \;\middle|\; p \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ \ q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$.

(d) [1.5 puntos] $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 0\}$, $\quad B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 2 = 0\}$.

Solución.

(a) Es evidente que $A \subseteq B$, pues $\mathbb{N} \cup \{0\} \subseteq \mathbb{Z}$. Por otra parte, sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \in B$. Por definición, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $x = n^2$. Pueden presentarse dos opciones: si $n \geq 0$, entonces $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (pues n es un número entero), y así, $x \in A$. Por otra parte, si $n < 0$, entonces $-n \in \mathbb{N}$. Dado que $(-n)^2 = n^2 = x$, sigue que $x \in A$. En cualquier caso se concluye que $x \in A$, y así, $B \subseteq A$. Por ende, $A = B$.

(b) Es evidente que $A \neq B$, puesto que $-1 \in B$, pero $-1 \notin A$.

(c) Es evidente que $B \subseteq A$, pues $\mathbb{N} \cup \{0\} \subseteq \mathbb{Z}$. Por otra parte, sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \in A$. Por definición, existen $p, q \in \mathbb{Z}$, con $q \neq 0$, tales que $x = p/q$. Pueden presentarse dos opciones: si $p \geq 0$, entonces $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (pues p es un número entero), y así, $x \in B$. Por otra parte, si $p < 0$, entonces $-p \in \mathbb{N}$. Luego:

$$x = \frac{p}{q} = \frac{-p}{-q}, \quad \text{donde} \quad -p \in \mathbb{N} \cup \{0\} \ \text{ y } \ -q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

por lo que $x \in A$. En cualquier caso se concluye que $x \in B$, y así, $A \subseteq B$. Por ende, $A = B$.

(d) Es evidente que $B = \emptyset$, pues $\pm\sqrt{2}$ es un número irracional. Por otra parte, si existiese $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \in A$, debiese cumplirse que $x^2 = -2 < 0$, lo cual es absurdo (el cuadrado de cualquier número real es mayor o igual a cero). Por ende, $A = B = \emptyset$.

Criterio de Corrección (CC) - Pregunta Nº2.

(CC1) [(a)] 1.5 puntos por demostrar que $A = B$. Se debe justificar la inclusión no trivial.

(CC2) [(b)] 1.5 puntos por demostrar que $A \neq B$. Basta que el alumno exhiba un número real que pertenezca a uno de los conjuntos, pero no al otro.

(CC3) [(c)] 1.5 puntos por demostrar que $A = B$. Se debe justificar la inclusión no trivial.

(CC4) [(d)] 1.5 puntos por demostrar que $A = B = \emptyset$. Se debe explicar claramente por qué ambos conjuntos son vacíos (basta una explicación breve; ya se demostró en clases que $\pm\sqrt{2}$ es un número irracional).