Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Primer Semestre 2026

Introducción al Álgebra y Geometría - MAT1207
Examen

Pregunta Nº1. Dado un conjunto universo U, considere los subconjuntos no vacíos $A, B, C \subseteq U$.

(a) [3 puntos] Demuestre que

$$A \subseteq C \quad \Longrightarrow \quad C - (B - A) = A \cup (C - B)\,.$$

(b) [3 puntos] Demuestre que

$$A \cup B = B \cap C \quad \Longrightarrow \quad A \subseteq B \subseteq C\,.$$

Solución.

(a) Notamos que:

$$\begin{aligned} C - (B - A) &= C \cap (B \cap A^c)^c \quad \text{(caracterización de la diferencia entre conjuntos)} \\ &= C \cap (B^c \cup A) \quad \text{(Leyes de De Morgan)} \\ &= (C \cap B^c) \cup (C \cap A) \quad \text{(distributividad)} \\ &= (C \cap B^c) \cup A \quad \text{(pues } A \subseteq C\text{, por hipótesis)} \\ &= (C - B) \cup A \quad \text{(caracterización de la diferencia entre conjuntos).} \end{aligned}$$

(b) Notamos que:

$$A \subseteq (A \cup B) = (B \cap C) \subseteq B\,,$$

dado que $A \cup B = B \cap C$, por hipótesis. En forma análoga:

$$B \subseteq (A \cup B) = (B \cap C) \subseteq C\,.$$

Criterio de Corrección (CC) - Pregunta Nº1.

(CC1) [(a)] 3 puntos por escribir correctamente la forma equivalente del conjunto $C-(B-A)$. La respuesta debe ser justificada, en el sentido de que deben haber igualdades intermedias (no es necesario que los alumnos escriban el nombre de la propiedad invocada).

(CC2) [(b)] 1.5 puntos por demostrar, justificadamente, que $A \subseteq B$.

(CC3) [(b)] 1.5 puntos por demostrar, justificadamente, que $B \subseteq C$.

Pregunta Nº2. Dados $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ y un entero $n \geq 1$, se define la suma parcial

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k a^k \, .$$

(a) [3 puntos] Demuestre, utilizando el principio de inducción, que

$$(a-1)S_n + \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} = n a^{n+1} \, .$$

(b) [3 puntos] Recordando el valor de la suma parcial de una sucesión geométrica, utilice el resultado del inciso anterior para concluir que

$$S_n = \frac{a - (n+1)a^{n+1} + n a^{n+2}}{(1-a)^2} \, .$$

Solución.

(a) Se nos pide demostrar, por inducción, que

$$(\forall n \geq 1) \quad (a-1)S_n + \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} = n a^{n+1} \, .$$

Caso base: para $n = 1$, debemos verificar que

$$(a-1)S_1 + \sum_{k=0}^{0} a^{k+1} = a^2 \quad \Longleftrightarrow \quad (a-1)a + a = a^2 \quad \Longleftrightarrow \quad V \, ,$$

pues $S_1 = a$.
Paso inductivo: supóngase que, para un cierto número entero $n \geq 1$, se tiene la igualdad

$$(a-1)S_n + \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} = n a^{n+1} \, . \tag{HI}$$

Debemos ahora demostrar que

$$(a-1)S_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} a^{k+1} = (n+1) a^{n+2} \, . \tag{PI}$$

En efecto, notemos que:

$$S_{n+1} = (n+1)a^{n+1} + S_n \qquad \text{y} \qquad \sum_{k=0}^{n} a^{k+1} = a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} \, ,$$

y así, la hipótesis de inducción (HI) implica que:

$$\begin{aligned}(a-1)S_{n+1}+\sum_{k=0}^{n}a^{k+1} &= (a-1)[(n+1)a^{n+1}+S_n]+a^{n+1}+\sum_{k=0}^{n-1}a^{k+1}\\ &= (n+1)(a-1)a^{n+1}+a^{n+1}+(a-1)S_n+\sum_{k=0}^{n-1}a^{k+1}\\ &= (n+1)(a-1)a^{n+1}+a^{n+1}+na^{n+1}\\ &= (n+1)(a-1)a^{n+1}+(n+1)a^{n+1}\\ &= (n+1)a^{n+2}\,.\end{aligned}$$

Conclusión: Por inducción, la igualdad

$$(a-1)S_n+\sum_{k=0}^{n-1}a^{k+1}=na^{n+1}$$

es válida para cualquier número entero $n\geq 1$.

(b) Dado que $a\neq 1$, podemos recurrir a la fórmula conocida que entrega el valor de la suma parcial de una progresión geométrica:

$$\sum_{k=0}^{n-1}a^{k+1}=a\sum_{k=0}^{n-1}a^{k}=a\frac{1-a^n}{1-a}=\frac{a-a^{n+1}}{1-a}\,.$$

Por ende, apelando al resultado del inciso anterior se deduce que

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{1}{a-1}\left(na^{n+1}-\sum_{k=0}^{n-1}a^{k+1}\right)\\ &= \frac{1}{1-a}\left(\sum_{k=0}^{n-1}a^{k+1}-na^{n+1}\right)\\ &= \frac{1}{1-a}\left(\frac{a-a^{n+1}}{1-a}-na^{n+1}\right)\\ &= \frac{a-a^{n+1}-n(1-a)a^{n+1}}{(1-a)^2}\\ &= \frac{a-a^{n+1}-na^{n+1}+na^{n+2}}{(1-a)^2}\\ &= \frac{a-(n+1)a^{n+1}+na^{n+2}}{(1-a)^2}\,.\end{aligned}$$

Criterio de Corrección (CC) - Pregunta Nº2.

(CC1) [(a)] 0.5 puntos por demostrar correctamente el caso base.

(CC2) [(a)] 1 punto por escribir la hipótesis inductiva (HI) y el paso inductivo (PI) que debe ser demostrado.

(CC3) [(a)] 1.5 puntos por demostrar correctamente la tesis (PI), utilizando la hipótesis de inducción (HI).

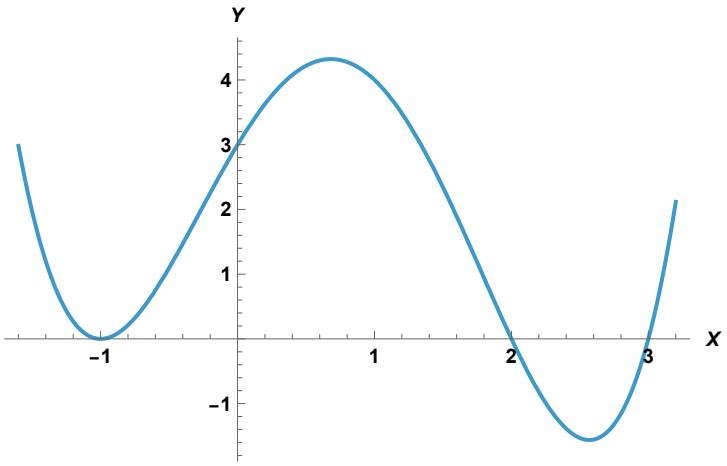
(CC4) [(b)] 2 puntos por calcular correctamente el valor de la suma $\sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1}$.

(CC5) [(b)] 1 punto por demostrar correctamente la igualdad propuesta, apelando al resultado del inciso (a) y al cálculo de la suma $\sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1}$.

Pregunta Nº3.

(a) [3 puntos] Considere el polinomio $P(x) = 2x^4 - 5x^3 - 8x^2 + 17x - 6$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Determine todas las raíces de P y factorice completamente P.

(b) [3 puntos] En la siguiente figura se muestra el gráfico de un polinomio $Q \in \mathbb{R}[x]$ de grado 4:



Determine la expresión del polinomio Q.

Solución.

(a) Dado que $P \in \mathbb{Z}[x]$, podemos aplicar el teorema de las raíces racionales para deducir que las únicas posibles raíces racionales de P han de ser las siguientes:

$$\pm 1\,, \quad \pm 2\,, \quad \pm 3\,, \quad \pm 6\,, \quad \pm\frac{1}{2} \quad \pm\frac{3}{2}\,.$$

Por inspección, notamos que $P(1) = 2 - 5 - 8 + 17 - 6 = 0$, de modo tal que $x = 1$ es raíz de P. Realizando la siguiente división de polinomios:

$$\begin{array}{rl} & 2x^4 - 5x^3 - 8x^2 + 17x - 6 \;\;:\;\; x - 1 = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 \\ - & \underline{(2x^4 - 2x^3)} \\ & -3x^3 - 8x^2 + 17x - 6 \\ - & \underline{(-3x^3 + 3x^2)} \\ & -11x^2 + 17x - 6 \\ - & \underline{(-11x^2 + 11x)} \\ & 6x - 6 \\ - & \underline{(6x - 6)} \\ & 0 \end{array}$$

deducimos que las otras raíces de P corresponderán a las raíces de $Q(x) \doteq 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Por inspección notamos que $Q(-2) = -16 - 12 + 22 + 6 = 0$. Posteriormente, realizamos

la siguiente división de polinomios:

$$\begin{array}{rl} & 2x^3-3x^2-11x+6 \quad : \quad x+2=2x^2-7x+3 \\ - & \underline{(2x^3+4x^2)} \\ & -7x^2-11x+6 \\ - & \underline{(-7x^2-14x)} \\ & 3x+6 \\ - & \underline{(3x+6)} \\ & 0 \end{array}$$

Resolviendo la ecuación cuadrática:

$$2x^2-7x+3=0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \left\{\frac{1}{2}, 3\right\},$$

se concluye que las raíces de P son $-2, 1/2, 1, 3$, con la siguiente factorización:

$$P(x)=2(x-1)(x+2)(x-3)\left(x-\frac{1}{2}\right) \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

(b) Del gráfico de Q se deduce inmediatamente que:

- $x=-1$ es raíz de multiplicidad par de Q;
- $x=2$ y $x=3$ son raíces simples de Q;
- $Q(0)=3$;
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} Q(x)=+\infty$.

Dado que Q es de grado 4, su expresión ha de tener la siguiente forma:

$$Q(x)=a(x-2)(x-3)(x+1)^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,, \tag{FQ}$$

para una cierta constante $a>0$ que puede determinarse de la condición $Q(0)=3$. Es decir.

$$3=Q(0)=6a \qquad \Longrightarrow \qquad a=\frac{1}{2}\,.$$

En conclusión: $Q(x)=\dfrac{1}{2}(x-2)(x-3)(x+1)^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Criterio de Corrección (CC) - Pregunta Nº3.

(CC1) [(a)] 0.5 puntos por hallar la raíz $x = 1$ de P, apelando al teorema de las raíces racionales.

(CC2) [(a)] 0.5 puntos por realizar la división de polinomios y determinar el polinomio Q.

(CC3) [(a)] 0.5 puntos por hallar la raíz $x = -2$ de Q, apelando al teorema de las raíces racionales.

(CC4) [(a)] 1 punto por efecutar la división de polinomios y hallar las demás raíces de P (que son $1/2$ y 3).

(CC5) [(a)] 0.5 puntos por escribir la factorización final de P.

(CC6) [(b)] 1 punto por justificar, en base al gráfico de Q, las cuatro propiedades expuestas: $x = -1$ es raíz de multiplicidad par, $x = 2$ y $x = 3$ son raíces simples, $Q(0) = 3$, $\lim_{x \to \pm\infty} Q(x) = +\infty$.

(CC7) [(b)] 1 punto por escribir la expresión (FQ).

(CC8) [(b)] 1 punto por calcular el valor de a y escribir la fórmula final para Q.

Pregunta Nº4. Considere la siguiente ecuación de segundo grado:

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 + 8x + 14y + 5 = 0\,.$$

(a) [1 puntos] Calcule el discriminante de la ecuación. Asumiendo que la cónica representada por dicha ecuación no es degenerada, determine si ésta corresponde a una elipse, una parábola o una hipérbola.

(b) [2 puntos] Determine los valores de $\sin(\phi)$ y $\cos(\phi)$, donde $\phi \in \mathbb{R}$ es el ángulo de la rotación de ejes que permite que la ecuación cuadrática no admita el término mixto xy.

(c) [3 puntos] Determine la ecuación cuadrática que se obtiene al aplicar la rotación identificada en el inciso (b). Exprese la ecuación resultante en forma canónica.

Solución.

(a) Calculando el discriminante asociado a la cónica:

$$\Delta = B^2 - 4AC = 4^2 - (4 \cdot 5 \cdot 8) = -144 < 0\,,$$

se deduce que la cónica es una elipse.

(b) Supongamos que el ángulo de rotación $\phi \in \mathbb{R}$ es agudo, esto es, $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Dicho ángulo debe satisfacer

$$\tan(2\phi) = \frac{B}{A - C} = -\frac{4}{3}\,,$$

de modo tal que $2\phi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, y así, $\phi \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$. Sigue que:

$$(\cos(2\phi))^2 = \frac{1}{1 + (\tan(2\phi))^2} = \frac{9}{25} \quad \Longrightarrow \quad \cos(2\phi) = -\frac{3}{5}\,.$$

Con esta información, obtenemos lo siguiente:

$$\cos(\phi) = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\phi)}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\,,$$

$$\sin(\phi) = \sqrt{\frac{1 - \cos(2\phi)}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}\,.$$

(c) Aplicamos la transformación

$$x = \cos(\phi)X - \sin(\phi)Y = \frac{X - 2Y}{\sqrt{5}}\,,$$

$$y = \sin(\phi)X + \cos(\phi)Y = \frac{2X + Y}{\sqrt{5}}\,,$$

y la reemplazamos en la ecuación de la cónica, obteniendo

$$5\left(\frac{X-2Y}{\sqrt{5}}\right)^2+4\left(\frac{X-2Y}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{2X+Y}{\sqrt{5}}\right)+8\left(\frac{2X+Y}{\sqrt{5}}\right)^2+\frac{8(X-2Y)}{\sqrt{5}}+\frac{14(2X+Y)}{\sqrt{5}}+5=0$$

$$\iff \frac{1}{5}\left[5(X-2Y)^2+4(X-2Y)(2X+Y)+8(2X+Y)^2\right]+\frac{36X-2Y}{\sqrt{5}}+5=0$$

$$\iff 9X^2+4Y^2+\frac{36}{\sqrt{5}}X-\frac{2}{\sqrt{5}}Y+5=0$$

$$\iff 9\left(X^2+\frac{4}{\sqrt{5}}X\right)+4\left(Y^2-\frac{1}{2\sqrt{5}}Y\right)+5=0$$

$$\iff 9\left(X+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2+4\left(Y-\frac{1}{4\sqrt{5}}\right)^2=\frac{9}{4}$$

$$\iff \frac{\left(X+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{\left(Y-\frac{1}{4\sqrt{5}}\right)^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}=1\,.$$

Criterio de Corrección (CC) - Pregunta Nº4.

(CC1) [(a)] 1 punto por calcular correctamente el discriminante asociado a la cónica, e identificar que ésta corresponde a una elipse.

(CC2) [(b)] 1 punto por determinar el valor de $\cos(2\phi)=-3/5$.

(CC3) [(b)] 1 punto por determinar los valores de $\cos(\phi)=1/\sqrt{5}$ y $\sin(\phi)=2/\sqrt{5}$.

(CC4) [(c)] 1 punto por escribir la transformación $x=\dfrac{X-2Y}{\sqrt{5}}$, $y=\dfrac{2X+Y}{\sqrt{5}}$.

(CC5) [(c)] 2 puntos por obtener la ecuación en forma canónica $\dfrac{\left(X+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\dfrac{\left(Y-\frac{1}{4\sqrt{5}}\right)^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}=1.$