Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Segundo Semestre 2025

MAT1207 - Introducción al Álgebra y Geometría
Interrogación 3 - Solución

La siguiente interrogación consta de 4 preguntas, cada una de 6 puntos subdivididos en partes iguales entre sus incisos (salvo que se explicite lo contrario). **Responda con lápiz pasta**, de manera que su respuesta se note al ser escaneada.

Duración: 2 horas.

1. (a) Reuelva la ecuación
$$2\tan(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta) - \sqrt{3}\tan(\theta) = 0.$$

   (b) Demuestre la identidad trigonométrica
$$\frac{\mathrm{sen}(x) + \mathrm{sen}(y)}{\cos(x) + \cos(y)} = \tan\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Solución. (a) Observamos que la ecuación se puede factorizar:
$$2\tan(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta) - \sqrt{3}\tan(\theta) = \tan(\theta)\big(2\,\mathrm{sen}\theta - \sqrt{3}\big) = 0.$$

Por tanto las soluciones se obtienen de las dos ecuaciones:
$$\tan(\theta) = 0 \quad \text{o} \quad 2\,\mathrm{sen}(\theta) - \sqrt{3} = 0.$$

Si $\tan(\theta) = 0$ entonces $\theta = k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Si $2\,\mathrm{sen}(\theta) - \sqrt{3} = 0$ entonces $\mathrm{sen}(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, de donde
$$\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{o} \quad \theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Así, las soluciones de la ecuación son de la forma
$$\theta = k\pi, \quad \theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{o} \quad \theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

(b) Aplicamos las fórmulas suma-a-producto:
$$\mathrm{sen}(x) + \mathrm{sen}(y) = 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right),$$
$$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Dividiendo ambas expresiones,

$$\frac{\operatorname{sen}(x)+\operatorname{sen}(y)}{\cos(x)+\cos(y)} = \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)} = \tan\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Esto demuestra la identidad.

□

Distribución de puntaje:

- **[0.5 puntos] C1a:** Factoriza la ecuación inicial
- **[0.5 puntos] C2a:** Identifica los dos casos $\tan\theta = 0$ y $2\operatorname{sen}(\theta) - \sqrt{3} = 0$.
- **[1 punto] C3a:** Resuelve correctamente $\tan\theta = 0 \Rightarrow \theta = k\pi$. (*Si solo incluye la familia $\theta = 2k\pi$, asignar 0.5p*).
- **[1 punto] C4a:** Resuelve correctamente $\operatorname{sen}(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ con ambas soluciones $\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ y $\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$. (*Si encuentra una familia de soluciones correctas, pero la segunda es incorrecta o no la incluye, asignar 0.5p*).
- **[1 punto] C1b:** Aplica correcta la fórmulas suma a producto para $\sin(x) + \sin(y)$
- **[1 punto] C2b:** Aplica correcta la fórmulas suma a producto para $\cos(x) + \cos(y)$
- **[1 punto] C3b:** Simplifica correctamente para llegar a $\tan\left(\frac{x+y}{2}\right)$.

2. Sean $A \neq 0$, $B > 0$ y $\theta = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$.

   (a) **[4pt]** Exprese $\operatorname{sen}(\theta)$ en términos de A y B, y demuestre que

   $$\cos(\theta) = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

   (b) **[2pt]** Demuestre que para todo $\varphi \in \mathbb{R}$,

   $$\sqrt{A^2+B^2}\,\operatorname{sen}(\theta+\varphi) = A\cos(\varphi) + B\operatorname{sen}(\varphi).$$

Solución. (a) Por definición de θ,

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Como $\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta) = 1$, entonces $\cos(\theta) = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\theta)}$, pero como $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, entonces $\cos(\theta) \geq 0$, por lo que

$$\cos(\theta) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\theta)} = \sqrt{1 - \frac{A^2}{A^2+B^2}} = \sqrt{\frac{B^2}{A^2+B^2}} = \frac{|B|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Como $B > 0$, se tiene $|B| = B$, por lo que

$$\cos(\theta) = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

(b) Usamos la fórmula de suma para el seno:

$$\operatorname{sen}(\theta+\varphi) = \operatorname{sen}(\theta)\cos(\varphi) + \cos(\theta)\operatorname{sen}(\varphi).$$

Multiplicando ambos lados por $\sqrt{A^2+B^2}$ y sustituyendo las expresiones de $\operatorname{sen}(\theta)$ y $\cos(\theta)$ obtenidas en (a),

$$\sqrt{A^2+B^2}\,\operatorname{sin}(\theta+\varphi) = A\cos(\varphi) + B\operatorname{sen}(\varphi),$$

que es lo requerido.

□

Distribución de puntaje:

- **[1 punto] C1a:** Identifica correctamente que $\operatorname{sen}(\theta) = \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$.
- **[1 punto] C2a:** Utiliza la ecuación $\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta) = 1$ o un triángulo rectángulo para encontrar $\cos(\theta)$.
- **[1.5 puntos] C3a:** Despeja o calcula correctamente el valor de $\cos(\theta)$.
- **[0.5 puntos] C4a:** Justifica a través del intervalo que $\cos(\theta)$ es positivo.
- **[1.0 punto] C1b:** Aplica correcta de la fórmula del seno de la suma.
- **[1.0 punto] C2b:** Sustituye y multiplica por $\sqrt{A^2+B^2}$ que conduce exactamente a $A\cos(\varphi) + B\operatorname{sen}(\varphi)$.

3. (a) Encuentre las soluciones en $\mathbb{C}$ de la ecuación $x^4 + 4 = 0$.

   (b) Liste las posibles raíces racionales de

   $$P(x) = x^5 - x^4 + 4x - 4$$

   y factorícelo en factores irreducibles en $\mathbb{R}[x]$.

(a) Debemos solucionar $x^4 = -4$. Para eso, encontramos que la forma polar de -4 es $4\text{cis}(\pi)$. Por tanto, las raíces cuartas son

$$x = \sqrt[4]{4}\text{cis}\left(\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right) = \sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right), \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$

Evaluando para $k = 0, 1, 2, 3$ obtenemos las cuatro raíces

$$z_0 = 1 + i, \quad z_1 = -1 + i, \quad z_2 = -1 - i, \quad z_3 = 1 - i.$$

(b) Por el teorema de las raíces racionales, los candidatos son divisores de 4: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. Evaluamos $P(1) = 1 - 1 + 4 - 4 = 0$, por tanto $x = 1$ es raíz racional.
Dividiendo por $(x - 1)$ obtenemos que

$$P(x) = (x - 1)(x^4 + 4).$$

Por la parte anterior, sabemos que

$$x^4 + 4 = (x - (1 + i))(x - (-1 + i))(x - (-1 - i))(x - (1 - i)).$$

Juntando por conjugados, tenemos que

$$(x - (1 + i)(x - (1 - i)) = x^2 - 2x + 2 \quad \text{y} \quad (x - (-1 + i)(x - (-1 - i)) = x^2 + 2x + 2$$

por lo que

$$P(x) = (x - 1)(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2).$$

Distribución de puntaje:

- **[1 punto] C1a:** Identifica correctamente la forma polar de -4.
- **[2 puntos] C2a:** Encuentra las cuatro raíces racionales (0.5p por cada una, no necesita escribirlas en la forma estándar). (*En caso de error en la forma polar de -4, entregar puntaje siempre y cuando sea consistente)*
- **[0.5 puntos] C1b:** Escribe las posibles raíces racionales
- **[1 punto] C2b:** Identifica que $x = 1$ es raíz y divide correctamente por $(x - 1)$.
- **[0.5 puntos] C3b:** Escribe $x^4 + 1$ como multiplicación de factores lineales complejos.
- **[1 punto] C4b:** Junta términos conjugados para encontrar los factores $x^2 + 2x + 2$ y $x^2 - 2x + 2$ (0.5 puntos por cada uno).

Indicación: Los puntajes *C3b* y *C4b* asignarlos aún cuando la factorización de $x^4 + 1$ sea incorrecta, siempre y cuando sea consistente con las raíces encontradas en la parte (a).

4. Sea $z = r\,\mathrm{cis}(\theta) \neq 0$ un número complejo. Demuestre que si $z^3 + \dfrac{1}{z^3}$ es real, entonces $r = 1$ o $\theta = \dfrac{\pi}{3}k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Indicación: Use teorema de Moivre y pruebe que $\mathrm{Im}\left(z^3 + \dfrac{1}{z^3}\right) = \left(r^3 - \dfrac{1}{r^3}\right)\,\mathrm{sen}(3\theta)$.

Solución. Escribimos $z = r\mathrm{cis}\,(\theta)$, entonces por el teorema de Moivre

$$z^3 = r^3\mathrm{cis}(3\theta) = r^3(\cos(3\theta) + i\,\mathrm{sen}(3\theta)),$$

y

$$\frac{1}{z^3} = z^{-3} = \frac{1}{r^3}\mathrm{cis}(-3\theta) = \frac{1}{r^3}(\cos(3\theta) - i\,\mathrm{sen}(3\theta)).$$

Sumando las dos expresiones:

$$z^3 + \frac{1}{z^3} = \left(r^3 + \frac{1}{r^3}\right)\cos 3\theta + i\left(r^3 - \frac{1}{r^3}\right)\,\mathrm{sen}(3\theta).$$

Así, la parte imaginaria es

$$\mathrm{Im}\left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right) = \left(r^3 - \frac{1}{r^3}\right)\,\mathrm{sen}(3\theta).$$

Si $z^3 + \dfrac{1}{z^3}$ es real, su parte imaginaria debe ser cero, es decir

$$\left(r^3 - \frac{1}{r^3}\right)\,\mathrm{sen}(3\theta) = 0.$$

De aquí hay dos posibilidades:

- $r^3 - \dfrac{1}{r^3} = 0$, lo que implica $r^6 = 1$ y como $r > 0$ se obtiene $r = 1$.
- $\mathrm{sen}(3\theta) = 0$, lo que da $3\theta = k\pi$ y por tanto

$$\theta = \frac{k\pi}{3}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Esto completa la demostración. □

Distribución de puntaje:

- **[1 punto] C1:** Calcula correctamente de z^3 usando la forma polar y el teorema de Moivre.
- **[1 punto] C2:** Calcula correctamente de $\dfrac{1}{z^3}$ usando la forma polar y el teorema de Moivre.
- **[1 punto] C3:** Obtiene correctame que la parte imaginaria es $\left(r^3 - \frac{1}{r^3}\right)\mathrm{sen}(3\theta)$.
- **[1 punto] C4:** Concluye que si $z^3 + \dfrac{1}{z^3}$ es real, entonces $\left(r^3 - \frac{1}{r^3}\right)\mathrm{sen}(3\theta) = 0$.
- **[1 punto] C5:** Muestra que si $\left(r^3 - \frac{1}{r^3}\right) = 0$, entonces $r = 1$.
- **[1 punto] C6:** Justifica que si $\mathrm{sen}(3\theta) = 0$, entonces $\theta = \frac{k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.