Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Segundo Semestre 2025

MAT1207 - Introducción al Álgebra y Geometría
Interrogación 2

La siguiente interrogación consta de 4 preguntas, cada una de 6 puntos subdivididos en partes iguales entre sus incisos (salvo que se explicite lo contrario). **Responda con lápiz pasta**, de manera que su respuesta se note al ser escaneada.

1. (a) Los dos primeros términos de una sucesión aritmética a_n son -7 y -3, respectivamente. Calcule a_{101}.

   (b) Determine una fórmula para la sucesión geométrica a_n que cumple que $a_2 = -24$ y $a_5 = 81$.

   (c) Sin necesidad de justificar, determine el valor de las siguientes funciones trigonométricas:

   - $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$
   - $\operatorname{sen}\left(-\frac{9\pi}{2}\right)$
   - $\sec\left(\frac{13\pi}{4}\right)$
   - $\tan\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

Solución. (a) Tenemos que $a_1 = -7$ y la distancia es $d = -3 - (-7) = 4$, por lo que $a_{101} = -7 + 100 \cdot 4 = 393$.

(b) Tenemos que $a_2 = a_1 \cdot r = -24$ y $a_5 = a_1 \cdot r^4 = 81$. Dividiendo, tenemos que

$$\frac{a_1 \cdot r^4}{a_1 \cdot r} = \frac{81}{-24} \implies r^3 = -\frac{27}{8} \implies r = -\frac{3}{2}.$$

Finalmente, como $a_1 \cdot r = -24 \implies a_1 = -24 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = 16$, por lo que

$$a_n = 16 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}.$$

(c)
- $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$
- $\sec\left(\frac{13\pi}{4}\right) = -\frac{2}{\sqrt{2}}$
- $\operatorname{sen}\left(-\frac{9\pi}{2}\right) = -1$
- $\tan\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$

□

Distribución de puntaje:

- **[0.5 puntos] C1a:** Identifica que $a_1 = -7$.
- **[1 punto] C2a:** Calcula $d = 4$.
- **[0.5 puntos] C3a:** Calcula correctamente a_{101}.
- **[0.5 puntos] C1b:** Encuentra que $r^3 = -\frac{27}{8}$.
- **[0.5 puntos] C2b:** Calcula correctamente r.
- **[0.5 puntos] C3b:** Calcula a_1.
- **[0.5 puntos] C4b:** Determina a_n.
  Los criterios C3b y C4b se asignarán aún cuando haya un error al calcular r, siempre y cuando sean consistentes con el r calculado.
- **[0.5 puntos] C1c:** Calcula $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$
- **[0.5 puntos] C2c:** Calcula $\sec\left(\frac{13\pi}{4}\right)$
- **[0.5 puntos] C3c:** Calcula $\operatorname{sen}\left(-\frac{9\pi}{2}\right)$
- **[0.5 puntos] C4c:** Calcula $\tan\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

2. Se inyecta una dosis de X_0 mg de un determinado medicamento en un paciente. Desde el día siguiente, cada día a la misma hora, se inyecta una dosis fija de 100mg. Se sabe que el organismo elimina la mitad del medicamento presente en la sangre cada 24 horas.

   Sea X_n la cantidad (en mg) de medicamento en la sangre después de n días, inmediatamente después de aplicar la dosis de ese día. De esta manera, se cumple la siguiente relación de recurrencia:

$$X_n = \frac{X_{n-1}}{2} + 100, \quad n \geq 1$$

   (a) Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = \dfrac{X_0}{2^n} + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{100}{2^{j-1}}$.

   (b) Sin usar inducción, concluya que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = \frac{X_0 - 200}{2^n} + 200.$$

   (c) ¿De cuánto debe ser la dosis X_0 para que X_n sea constante? Justifique su respuesta.

Solución. (a) Por inducción, para $n = 1$ se tiene que $X_1 = \dfrac{X_0}{2} + 100$, mientras que $\dfrac{X_0}{2^1} + \displaystyle\sum_{j=1}^{1} \frac{100}{2^{j-1}} = \frac{X_0}{2} + \frac{100}{2^0} = \frac{X_0}{2} + 100$.

Luego, suponiendo que $X_k = \dfrac{X_0}{2^k} + \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \frac{100}{2^{j-1}}$, entonces

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= \frac{X_k}{2} + 100 \\ &= \frac{\dfrac{X_0}{2^k} + \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \frac{100}{2^{j-1}}}{2} + 100 \\ &= \frac{X_0}{2^{k+1}} + \sum_{j=1}^{k} \frac{100}{2^j} + \frac{100}{2^0} \\ &= \frac{X_0}{2^{k+1}} + \sum_{j=2}^{k+1} \frac{100}{2^{j-1}} + \frac{100}{2^0} \\ &= \frac{X_0}{2^{k+1}} + \sum_{j=1}^{k+1} \frac{100}{2^{j-1}} \end{aligned}$$

Lo que comprueba la tesis inductiva. Por principio de inducción, se sigue que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = \dfrac{X_0}{2^n} + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{100}{2^{j-1}}$.

(b) Tenemos que, por la suma de una sucesión geométrica,

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{X_0}{2^n} + \sum_{j=1}^{n} \frac{100}{2^{j-1}} \\ &= \frac{X_0}{2^n} + 100\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{X_0}{2^n} + 100\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{X_0}{2^n} + 200\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \\ &= \frac{X_0 - 200}{2^n} + 200. \end{aligned}$$

(c) Si queremos que X_n sea constante, entonces $X_1 = X_0$. De aquí, y la recursión, se tiene que

$$\frac{X_0}{2} + 100 = X_0 \implies X_0 + 200 = 2X_0 \implies X_0 = 200.$$

En efecto, si $X_0 = 200$, la fórmula en (b) nos dice que $X_n = \dfrac{200-200}{2} + 200 = 200$, lo que prueba que X_n es constante.

□

Distribución de puntaje:

- **[0.5 puntos] C1a:** Comprueba el caso $n = 1$.
- **[0.5 puntos] C2a:** Identifica correctamente la hipótesis inductiva
- **[1 punto] C3a:** Demuestra correctamente la tesis inductiva y concluye.
  Los puntajes del item a se darán completo en caso de cualquier otra demostración.
- **[1 punto] C1b:** Identifica y calcula la suma geométrica
- **[1 punto] C2b:** Concluye la igualdad pedida.
- **[1 punto] C1c:** Identifica que $X_0 = 200$ (Aún sin justificar)
- **[1 punto] C2c:** Justifica correctamente que $X_0 = 200$ permite que X_n sea constante.

3. Sea $0 < p < 1$ y $n \in \mathbb{N}$. Cosidere la sucesión

$$a_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n$$

(a) **[2pt]** Calcule $\sum_{k=0}^{n} a_k$.

(b) **[4pt]** Calcule, en términos de n y p, $\sum_{k=0}^{n} k \cdot a_k$.

Indicación: Pruebe que $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$

Solución. (a) Por teorema del binomio,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (1 + (1-p)^n = 1.$$

(b) Notemos primero que $k\binom{n}{k} = k\dfrac{n!}{k!(n-k)!} = k\dfrac{n \cdot (n-1)!}{k \cdot (k-1)!(n-k)!} = n\binom{n-1}{k-1}$ (pues $(n-1-(k-1)) = (n-k)$).
Luego,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k a_k &= \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^{k+1} (1-p)^{n-k-1} \\
&= np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{(n-1)-k} \\
&= np(p + (1-p))^{n-1} \\
&= np
\end{aligned}$$

□

Distribución de puntaje:

- **[1 punto] C1a:** Utiliza correctamente el teorema del binomio en (a).
- **[1 punto] C2a:** Concluye que $\sum_{k=0}^{n} a_k = 1$.

- **[1 punto] C1b:** Demuestra que $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.
- **[0.5 punto] C2b:** Utiliza la propiedad anterior.
- **[0.5 puntos] C3b:** Realiza cambio de índice.
- **[0.5 puntos] C4b:** Factoriza np.
- **[0.5 puntos] C5b:** Utiliza correctamente el teorema del binomio en (b). *Si tiene algún error en el desarrollo pero corresponde usar teorema del binomio y se usa correctamente, asignar este puntaje*
- **[0.5 punto] C6b:** Concluye que $\sum_{k=1}^{n} ka_k = np$. *Este puntaje se asigna solo si el valor obtenido es correcto.*

4. Para encontrar la distancia entre una orilla a otra de un río, una experta en topografía escoge dos puntos en una orilla, A y B, a 100m ente ellos. Desde un punto C al otro lado del río calcula que $\angle BAC = 75°$ y $\angle ABC = 45°$. Calcule la distancia AC.

   Solución. Se tiene que $\angle BCA = 180° - 75° - 45° = 60°$. Luego, por teorema del seno,

$$\frac{100}{\text{sen}(60°)} = \frac{AC}{\text{sen}(45°)} \implies AC = \frac{100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{100\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

   Por lo tanto, la distancia AC es de $\dfrac{100\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$m

□

Distribución de puntaje:

- **[1 punto] C1:** Calcula $\angle BCA$.
- **[1 punto] C2:** Enuncia correctamente el Teorema del Seno.
- **[1 punto] C3:** Calcula correctamente $\text{sen}(60°)$.
- **[1 punto] C4:** Calcula correctamente $\text{sen}(45°)$.
- **[2 puntos] C5:** Encuentra el valor de AC.
  En caso de error en los criterios C1, C3 o C4, asignar el valor de C5 mientras sea consistente con los valores calculados.