Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Segundo Semestre 2025

MAT1207 - Introducción al Álgebra y Geometría
Interrogación 1 - Solución

1. **(6pt)** Demuestre la siguiente igualdad de conjuntos:

$$A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C).$$

Indicación: *Recuerde que si X e Y son conjuntos, entonces $X - Y = X \cap Y^C$.*

Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned}
A - (B - C) &= A \cap (B - C)^C && \text{(Porque } X - Y = X \cap Y^C\text{)} \\
&= A \cap (B \cap C^C)^C && \text{(Porque } X - Y = X \cap Y^C\text{)} \\
&= A \cap (B^C \cup (C^C)^C) && \text{(Ley de D. Morgan)} \\
&= A \cap (B^C \cup C) && \text{(Porque } (C^C)^C = C\text{)} \\
&= (A \cap B^C) \cup (A \cap C) && \text{(Distributibidad)} \\
&= (A - B) \cup (A \cap C) && \text{(Porque } X - Y = X \cap Y^C\text{)}
\end{aligned}$$

□

Distribución de puntaje:

- **[0.5 puntos] C1:** Usa que $A - (B - C) = A \cap (B - C)^C$.
- **[0.5 puntos] C2:** Usa que $B - C = B \cap C^C$.
- **[1.5 punto] C3:** Prueba que $(B \cap C^C)^C = B^C \cup C$.
- **[1.5 puntos] C4:** Usa distributibidad.
- **[1 punto] C5:** Usa que $A \cap B^C = A - B$ y concluye la igualdad.
- **[1 punto] C6:** Justifica los pasos utilizados.

2. (a) **(4pt)** Demuestre la siguiente ley de inferencia:

$$\left[\ (p \vee q) \wedge (p \implies r) \wedge (s \implies \overline{r}) \wedge (\overline{s} \implies t) \wedge \overline{t}\ \right] \implies q$$

(b) **(2pt)** Pedro y Juan son trabajadores de una joyería donde se perdió un diamante. La policía, en el juicio, comprueba los siguientes hechos:

- Pedro o Juan encargaron el robo del diamante.
- Si Pedro encargó el robo, entonces el diamante sigue escondido en la tienda.
- Si Juan dice la verdad, entonces el diamante no está escondido en la tienda.
- Si Juan miente, entonces a la hora del robo él se encontraba en la tienda.
- Juan no estaba en la tienda a la hora del robo.

¿Quién encargó el robo del diamante? Justifique su respuesta.
Indicación: *Puede usar el inciso anterior, incluso sin demostrarlo.*

Solución. (a) Tenemos que, por ley de contrapositiva, $(s \implies \overline{r}) \equiv (\overline{\overline{r}} \implies s)$. Luego,

$$\begin{aligned}
& \left[\ (p \vee q) \wedge (p \implies r) \wedge (s \implies \overline{r}) \wedge (\overline{s} \implies t) \wedge \overline{t}\ \right] && \\
\equiv\ & \left[\ (p \vee q) \wedge (p \implies r) \wedge (\overline{\overline{r}} \implies \overline{s}) \wedge (\overline{s} \implies t) \wedge \overline{t}\ \right] && \\
\equiv\ & \left[\ (p \vee q) \wedge (p \implies r) \wedge (r \implies \overline{s}) \wedge (\overline{s} \implies t) \wedge \overline{t}\ \right] && \text{(Doble negación)} \\
\Rightarrow\ & \left[\ (p \vee q) \wedge (p \implies \overline{s}) \wedge (\overline{s} \implies t) \wedge \overline{t}\ \right] && \text{(Ley de implicación lógica)} \\
\Rightarrow\ & \left[\ (p \vee q) \wedge (p \implies t) \wedge \overline{t}\ \right] && \text{(Ley de implicación lógica)} \\
\Rightarrow\ & \left[\ (p \vee q) \wedge \overline{p}\ \right] && \text{(Modus Tollens)} \\
\equiv\ & \left[\ (p \wedge \overline{p}) \vee (q \wedge \overline{p})\ \right] && \text{(Distributividad)} \\
\equiv\ & \left[\ F\ \vee (q \wedge \overline{p})\ \right] && \text{(Contradicción)} \\
\equiv\ & \left[\ (q \wedge \overline{p})\ \right] && \text{(Absorción)} \\
\Rightarrow\ & \ q && \text{(Relajación)}
\end{aligned}$$

Con lo que probamos la ley de inferencia.

(b) Si tomamos las afirmaciones:

- p : Pedro encargó el robo del diamante.
- q : Juan encargó el robo del diamante.
- r : El diamante sigue escondido en la tienda.
- s : Juan dice la verdad.
- t : Juan estaba en la tienda a la hora del robo.

Entonces las pruebas de la policía se escriben como:

$$\left[\ (p \vee q) \wedge (p \implies r) \wedge (s \implies \overline{r}) \wedge (\overline{s} \implies t) \wedge \overline{t}\ \right]$$

Por la parte anterior, si esto es verdadero, entonces q es verdadero, es decir, Juan encargó el robo del diamante.

□

Distribución de puntaje:

- **[0.5 puntos] C1a:** Demuestra que $(s \implies \overline{r}) \equiv (r \implies s)$.
- **[1 punto] C2a:** Prueba que $[(p \implies r) \wedge (r \implies \overline{s}) \wedge (\overline{s} \implies t)] \implies (p \implies t)$.
- **[0.5 puntos] C3a:** Prueba que $[(p \implies t) \wedge \overline{t}] \implies \overline{p}$.
- **[1 punto] C4a:** Concluye que $[(p \vee q) \wedge \overline{p}] \implies q$.
- **[1 punto] C5a:** Justifica los pasos utilizados.
- **[1 punto] C1b:** Escribe el problema utilizando letras proposicionales.
- **[0.5 puntos] C2b:** Identifica y utiliza la parte (a), o realiza otra justificación.
- **[0.5 puntos] C3b:** Concluye que Juan encargó el robo.

3. **(6pt)** Determine si cada una de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En caso de ser verdadera, demuéstrela. En caso de ser falsa, escriba su negación y demuestre que tal negación es verdadera.

   - $\forall x \in \mathbb{N},\ \exists y \in \mathbb{N}\ :\ x \leq y$.
   - $\exists y \in \mathbb{N}\ :\ \forall x \in \mathbb{N},\ x \leq y$.

   Solución.

   - La primera afirmación es VERDADERA. Para demostrarla, consideremos un $x \in \mathbb{N}$ arbitrario, y tomemos $y = x$. Luego, como $x \leq x$, entonces $x \leq y$.
   - La segunda afirmación es FALSA. Su negación es

     $$\overline{\exists y \in \mathbb{N}\ :\ \forall x \in \mathbb{N},\ x \leq y} \quad \equiv \quad \forall y \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{N}\ :\ x > y$$

     Para demostrar que tal negación es verdadera, consideremos un $y \in \mathbb{N}$ arbitrario y tomemos $x = y + 1$. Como $y + 1 > y$, entonces $x > y$.

   □

Distribución de puntaje:

- **[1 punto] C1:** Determina que la primera afirmación es verdadera.
- **[0.6 puntos] C2:** Considera un $x \in \mathbb{N}$ arbitrario.
- **[0.7 puntos] C3:** Elige un $y \in \mathbb{N}$ mayor o igual a x para demostrar la afirmación.
- **[1 punto] C4:** Determina que la segunda afirmación es falsa.
- **[1.4 puntos] C5:** Escribe correctamente la negación de la primera afirmación.
- **[0.6 puntos] C6:** Considera un $y \in \mathbb{N}$ arbitrario.
- **[0.7 puntos] C7:** Elige un $x \in \mathbb{N}$ mayor a y para demostrar la afirmación.

4. **(6pt)** Demuestre que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $2^{n+1} + 3^{2n-1}$ es divisible por 7.

Solución. **Demostración por inducción:** Buscamos demostrar $\forall\ n \in \mathbb{N}$ la afirmación

$$P(n):\ 2^{n+1} + 3^{2n-1} \text{ es divisible por } 7.$$

- **Caso base:** ($P(1):\ 2^{1+1} + 3^{2\cdot 1-1}$ es divisible por 7).
  Tenemos que $2^{1+1} + 3^{2\cdot 1-1} = 2^2 + 3 = 4 + 3 = 7$, y 7 es divisible por 7, por lo que $P(1)$ es verdadero.
- **Paso inductivo** Debemos probar que $P(k) \implies P(k+1)$. Tenemos entonces:
  - **Hipótesis inductiva (HI):** $P(k) : 2^{k+1} + 3^{2k-1}$ es divisible por 7.
  - **Tesis inductiva:** $P(k+1) : 2^{(k+1)+1} + 3^{2(k+1)-1}$ es divisible por 7.

  Demostración. Como $2^{k+1} + 3^{2k-1}$ es divisible por 7, entonces $2^{k+1} + 3^{2k-1} = 7m$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Luego,

$$\begin{aligned}
2^{(k+1)+1} + 3^{2(k+1)-1} &= 2^{k+2} + 3^{2k+1} \\
&= 2^{k+1} \cdot 2 + 3^{2k-1} \cdot 9 \\
&= 2^{k+1} \cdot 2 + 3^{2k-1} \cdot (2+7) \\
&= 2^{k+1} \cdot 2 + 3^{2k-1} \cdot 2 + 3^{2k-1} \cdot 7 \\
&= 2 \cdot \underbrace{(2^{k+1} + 3^{2k-1})}_{7m} + 3^{2k-1} \cdot 7 \\
&= 2 \cdot 7m + 3^{2k-1} \cdot 7 \\
&= 7 \cdot (2m + 3^{2k-1})
\end{aligned}$$

  Como $2m + 3^{2k-1} \in \mathbb{N}$, entonces $2^{(k+1)+1} + 3^{2(k+1)-1}$ es divisible por 7.
- De esta forma, por principio de inducción, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $2^{n+1} + 3^{2n-1}$ es divisible por 7.

□

Distribución de puntaje:

- **[1 punto] C1:** Demuestra el caso base.
- **[1.5 puntos] C2:** Identifica implícita o explícitamente la inductiva.
- **[0.5 puntos] C3:** Afirma que $2^{k+1} + 3^{2k-1} = 7m$ para algún $m \in \mathbb{N}$.
- **[1 punto] C4:** Muestra que $2^{(k+1)+1} + 3^{2(k+1)-1} = 2 \cdot (2^{k+1} + 3^{2k-1}) + 3^{2k-1} \cdot 7$
- **[1 punto] C5:** Concluye que $2^{(k+1)+1} + 3^{2(k+1)-1}$ es divisible por 7.
- **[1 punto] C6:** Concluye por principio de inducción que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $2^{n+1} + 3^{2n-1}$ es divisible por 7.