Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Segundo Semestre 2025

MAT1207 - Introducción al Álgebra y Geometría
Examen - Solución

El siguiente examen consta de 4 preguntas, cada una de 6 puntos subdivididos en partes iguales entre sus incisos (salvo que se explicite lo contrario). **Responda con lápiz pasta**, de manera que su respuesta se note al ser escaneada.

Duración: 2 horas.

1. (a) Usando inducción, demuestre que

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

(b) Sea $t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ tal que $\operatorname{sen}(t) = \dfrac{3}{5}$. Calcule $\cos(t)$ y $\tan(2t)$.

Solución. (a) **Caso Base** $n = 1$**:**

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}.$$

Paso inductivo: Supongamos que es verdadero para $n = k$:

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Entonces,

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = (k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Se cumple para $n = k+1$. Por lo tanto, por principio de inducción, la fórmula vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Como $t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, está en el segundo cuadrante, por lo que $\cos(t) < 0$. Luego, como $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$.

$$\cos(t) = -\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} = -\sqrt{1 - \tfrac{9}{25}} = -\tfrac{4}{5}.$$

Para calcular $\tan(2t)$, necesitamos calcular

$$\tan(t) = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = \frac{3/5}{-4/5} = -\frac{3}{4}.$$

Así,

$$\tan(2t) = \frac{2\tan t}{1-\tan^2 t} = \frac{2(-3/4)}{1-9/16} = -\frac{24}{7}.$$

□

Distribución de puntaje:

- **[0.5 puntos] C1a:** Demuestra el caso base
- **[1 punto] C2a:** Identifica la hipótesis inductiva
- **[0.5 puntos] C3a:** Utiliza la hipótesis inductiva para probar que $\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$
- **[1 puntos] C4a:** Demuestra la tesis inductiva y concluye.
- **[0.5 puntos] C1b:** Aplica la fórmula pitagórica o usa un triángulo rectángulo para calcular $\cos(t)$.
- **[1 punto] C2b:** Calcula correctamente $\cos(t)$ *(Asignar 0.7p si no agrega signo).*
- **[0.5 puntos] C3b:** Aplica fórmula de $\tan(2t)$.
- **[0.5 puntos] C4b:** Calcula $\tan(t)$.
- **[0.5 puntos] C5b:** Calcula $\tan(2t)$.
  En caso de error en el cálculo de $\cos(t)$ *o en* $\tan(t)$*, asignar el resto del puntaje si es consecuente con los valores calculados.*

2. (a) Encuentre todas las raíces del polinomio

$$P(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$$

(b) Encuentre las raíces cúbicas de i (es decir, los $z \in \mathbb{C}$ tal que $z^3 = i$).

Solución. (a) Las posibles raíces racionales de P son $\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}$. Notamos que

$$P(1) = 2 + 1 - 5 + 2 = 0$$

Como $P(1) = 0$, factorizamos:

$$P(x) = (x - 1)(2x^2 + 3x - 2).$$

Resolvemos la cuadrática:

$$2x^2 + 3x - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{-3 \pm 5}{4}.$$

Por lo tanto, las raíces de P son:

$$x = 1, \qquad x = \frac{1}{2}, \qquad x = -2.$$

(b) El número complejo i tiene módulo $r = |i| = 1$, y argumento $\theta = \frac{\pi}{2}$.
Por lo tanto,

$$i = 1 \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Las raíces cúbicas de un número en forma polar $r\ \operatorname{cis}(\theta)$ se obtienen como

$$\sqrt[3]{r}\ \operatorname{cis}\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi k}{3}\right), \qquad k = 0, 1, 2.$$

Aplicamos esto a i:

$$z_k = 1^{1/3}\ \operatorname{cis}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2\pi k}{3}\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}\right), \qquad k = 0, 1, 2.$$

Así, las raíces son

$$z_0 = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$z_1 = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$z_2 = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -i.$$

□

Distribución de puntaje:

- **[1 punto] C1a:** Encuentra una primera raíz c *(si identifica las posibles raíces racionales, pero no evalúa, asignar* $0.5p$*).*
- **[1 punto] C2a:** Factoriza por $(x - c)$.
- **[1 punto] C3a:** Encuentra las otras dos raíces *(0.5p cada una).*
  En caso de evaluar en todas las raíces y encontrar las 3, sin factorizar, asignar 1 punto por cada una correcta.
- **[1 punto] C1b:** Encuentra forma polar de i.
- **[0.5 puntos] C2b:** Identifica (explícita o implícitamente) la fórmula de raíces cúbicas de un complejo.
- **[1.5 puntos] C3b:** Encuentra las tres raíces *(0.5p cada una)*
  En caso de error en la factorización de C2a, asignar el puntaje de C3a siempre y cuando sea consecuente. En caso de error en la forma polar de C1b, asignar el resto del puntaje siempre y cuando sea consecuente

3. (a) Considere P la parábola con foco $F(1,-1)$ y directriz D de ecuación $4x-3y+5=0$. Determine si el punto $A(4,3)$ pertenece a P.

   (b) Encuentre las rectas de pendiente 1 que son tangenetes a la gráfica de la ecuación

$$(x-1)^2+(y+2)^2=9$$

Solución. (a) P está en la parábola si y solo si está a la misma distancia del foco que la directriz.

Distancia al foco:

$$d_F=\sqrt{(4-1)^2+(3+1)^2}=5.$$

Distancia a la directriz:

$$d_D=\frac{|4\cdot 4-3\cdot 3+5|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{12}{5}.$$

Como $5\neq\frac{12}{5}$, el punto A **no pertenece** a la parábola.

(b) Buscamos rectas de pendiente 1, es decir, de la forma $y=x+n$.

Opción 1: Para que la recta sea tangente a la circunferencia, la distancia del centro $(1,-2)$ debe ser $r=3$:

$$\frac{|1-(-2)+n|}{\sqrt{2}}=3 \quad\Longrightarrow\quad |3+n|=3\sqrt{2}.$$

$$n=-3\pm 3\sqrt{2}.$$

Así, las rectas tangentes son:

$$y=x-3+3\sqrt{2}, \qquad y=x-3-3\sqrt{2}.$$

Opción 2: Para que la recta sea tangente a la circunferencia, la intersección debe ser única.

$$\begin{cases} y=x+n \\ (x-1)^2+(y+2)^2=9 \end{cases} \Longrightarrow\ (x-1)^2+(x+n+2)^2=9$$

$$\Longrightarrow\ x^2-2x+1+x^2+2(n+2)x+(n+2)^2=9$$

$$\Longrightarrow\ 2x^2+(2n+2)x+n^2+4n-4=0$$

Para que la intersección sea única, entonces $\Delta=(2n+2)^2-4\cdot 2\cdot(n^2+4n-4)=0$, es decir,

$$-4n^2-24n+36=0\ \Longrightarrow\ n^2+6n-9=0\ \Longrightarrow\ n=-3\pm 3\sqrt{2}$$

Así, las rectas tangentes son:

$$y=x-3+3\sqrt{2}, \qquad y=x-3-3\sqrt{2}.$$

□

Distribución de puntaje:

- **[0.5 puntos] C1a:** Identifica (implícita o explícitamente) que P pertenece a la parábola si y solo si las distancias son iguales
- **[1 punto] C2a:** Calcula d_F.
- **[1 punto] C3a:** Calcula d_D.
- **[0.5 puntos] C4a:** Concluye que P no está en la parábola (*En caso de error en alguna de las distancias, asignar puntaje en de C4a en caso de ser consecuente*).
- **[0.3 puntos] C1b:** Escribe ecuación de las rectas $y = x + n$ o equivalente.
- **[0.5 puntos] C2b:** Identifica que la recta es tangente si y solo si la distancia al centro es igual al radio, o la intersección es única.
- **[0.5 puntos] C3b:** Encuentra coordenadas del centro (opción 1) o reemplaza $y = x+n$ en la ecuación de la circunferencia (opción 2).
- **[0.5 puntos] C4b:** Encuentra el radio (opción 1) o llega a $2x^2+(2n+2)x+n^2+4n-4 = 0$ (opción 2).
- **[0.5 puntos] C5b:** Calcula distancia del centro a la recta (opción 1) o calcula el discriminante de la ecuación cuadrática (opción 2).
- **[0.5 puntos] C6b:** Calcula valores de n.
- **[0.2 puntos] C7b:** Escribe ecuaciones de la recta.
  Indicación: En caso de error en criterios C3b, C4b, C5b o C6b, asignar el resto siempre y cuando sea consecuente.

4. (a) Esboce la gráfica de la ecuación

$$x^2 + 9y^2 + 6x - 36y + 36 = 0$$

Incluya, en caso de corresponder, las coordenadas de su(s) foco(s) y vértice(s).

(b) Determine si la cónica de ecuación

$$xy - 2x + 3y + 4 = 0$$

es una elipse, una parábola, o una hipérbola. Determine un cambio de variable proveniente de una rotación que permita eliminar el término xy.

Indicación: Puede asumir que la cónica es no degenerada.

Solución. (a) Completamos cuadrados en

$$x^2 + 9y^2 + 6x - 36y + 36 = 0.$$

$$(x^2 + 6x) + 9(y^2 - 4y) + 36 = 0.$$

$$(x+3)^2 - 9 + 9[(y-2)^2 - 4] + 36 = 0.$$

$$(x+3)^2 + 9(y-2)^2 = 9.$$

Dividiendo:

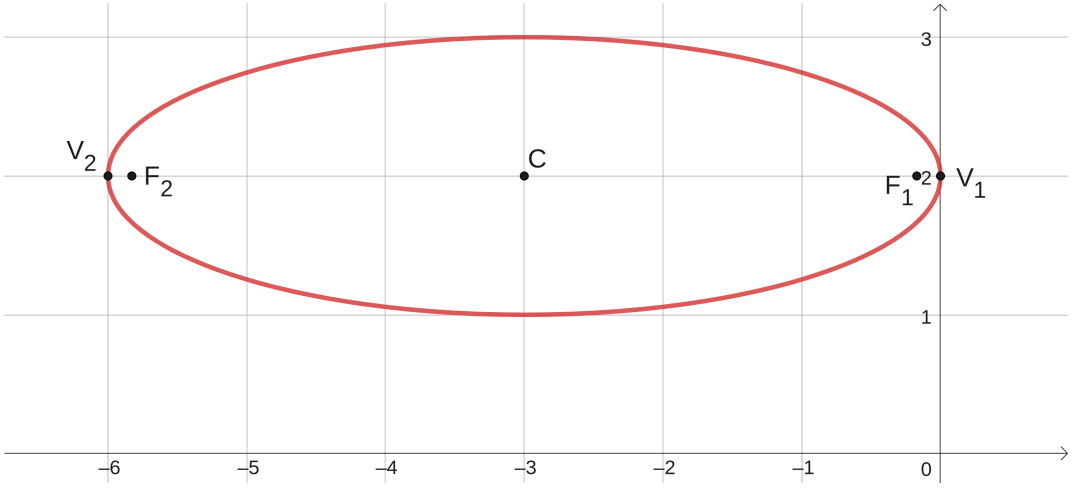
$$\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{1} = 1.$$

Es una elipse de centro $C(-3, 2)$, eje mayor horizontal, $a = 3$, $b = 1$, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{8}$. Los vértices son

$$V_1(0, 2), \quad V_2(-6, 2)$$

y sus focos

$$F_1(-3 + \sqrt{8},\, 2), \quad F_2(-3 - \sqrt{8},\, 2).$$



(b) Calculamos el discriminante con $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$.

$$\delta = B^2 - 4AC = 1 > 0 \Rightarrow \text{hipérbola.}$$

Como $A = C = 0$, debemos tomar rotación con $\varphi = \frac{\pi}{4}$:

$$x = X\cos(\varphi) - Y\,\text{sen}(\varphi) = \frac{\sqrt{2}X}{2} - \frac{\sqrt{2}Y}{2}$$
$$y = X\,\text{sen}(\varphi) + Y\cos(\varphi) = \frac{\sqrt{2}X}{2} + \frac{\sqrt{2}Y}{2}$$

□

Distribución de puntaje:

- **[0.5 puntos] C1a:** Completa cuadrados correctamente
- **[0.5 puntos] C2a:** Divide por 9.
- **[0.5 puntos] C3a:** Encuentra valores de a y b.
- **[0.5 puntos] C4a:** Calcula coordenadas de los vértices.
- **[0.5 puntos] C5a:** Calcula coordenadas de los focos.
- **[0.5 puntos] C6a:** Grafica la elipse con eje mayor horizontal y los puntos calculados previamente.
  En caso de error en algún criterio, asignar los siguientes en caso de ser consecuentes.
- **[0.5 puntos] C1b:** Calcula discrimintante.
- **[1 puntos] C2b:** Identifica que la ecuación corresponde a una hipérbola.
- **[0.5 puntos] C3b:** Identifica rotación en $\varphi = \pi/4$.
- **[1 puntos] C4b:** Calcula cambio de variable (*0.5p por cada coordenada*)
  Indicación: En caso de error en C1b, asignar C2b en caso de ser consecuente.

Bonus: Identifique si cada una de las siguientes ecuaciones corresponden a una circunferencia, elipse, parábola, hipérbola, recta, un par de rectas paralelas, un par de rectas secantes, un punto o vacío. Cada respuesta correcta sumará 0.5p a la suma de puntajes total.

a) $x^2 - 9y^2 - 2x + 1 = 0$: **Dos rectas secantes**.

b) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 8 = 0$: **Vacío**.

c) $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0$: **Circunferencia**.

d) $4x^2 + 9y^2 + 8x - 36y + 4 = 0$: **Elipse**.

e) $4x^2 - y^2 - 8x - 6y - 9 = 0$: **Hipérbola**.

f) $y^2 - 4y + 3 = 0$: **Dos rectas paralelas**.

g) $y^2 + 8x - 6y + 17 = 0$: **Parábola**.

h) $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 34 = 0$: **Punto**.