Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer Semestre 2025

Introducción al Álgebra y Geometría - MAT1207
Interrogación N°8

1. Los vértices de un triángulo están en $A(-3,-2)$, $B(2,1)$ y $C(6,5)$.

   a) Encuentre la longitud de la altura del vértice C al lado AB.

   b) Calcule el área del triángulo ABC.

   Solución.

   a) La pendiente de la recta que pasa por el lado AB es $m = \dfrac{1-(-2)}{2-(-3)} = \dfrac{3}{5}$ y la ecuación de la recta que pasa por el lado AB es

   $$y - 1 = m(x-2) \Longleftrightarrow y - 1 = \frac{3}{5}(x-2) \Longleftrightarrow L \,:\, 3x - 5y - 1 = 0\,.$$

   La longitud de la altura del vértice C al lado AB es la distancia de la recta L al punto C

   $$\ell = d(C,L) = \frac{|3\cdot(6) - 5\cdot(5) - 1|}{\sqrt{3^2+5^2}} = \frac{8}{\sqrt{34}}\,.$$

   b) La distancia entre los puntos A y B es

   $$AB = \sqrt{(-3-2)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{34}\,.$$

   El área del triángulo ABC es

   $$A = \frac{1}{2}\cdot(\text{base})\cdot(\text{altura}) = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot d(C,L) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{34}\cdot\frac{8}{\sqrt{34}} = 4\,.$$

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 1.

CC 1. 1,5 puntos por establecer la ecuación de la recta L.

CC 2. 1,5 puntos por calcular la distancia entre la recta L y el punto C.

CC 3. 1,5 puntos por calcular la distancia entre A y B.

CC 4. 1,5 puntos por determinar el valor del área.

2. Considere una circunferencia tal que los extremos de un diámetro son $A(2,-1)$ y $B(6,3)$.

   a) Encuentre la ecuación de la circunferencia.

   b) Determine la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto A.

   c) ¿Cuál es la distancia del centro de la circunferencia a la recta $x+y=1$?

Solución.

a) El centro de la circunferncia es el punto medio de AB, entonces

$$C = \left(\frac{2+6}{2}, \frac{-1+3}{2}\right) = (4,1)\,.$$

El radio de la circunfencia es la distancia entre el centro y cualquier punto A o B, luego

$$r = \sqrt{(4-2)^2+(1+1)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

Por lo tanto, la ecuación de la circunferencia es

$$(x-4)^2+(y-1)^2 = 8\,.$$

b) La recta tangente de la circunferencia es perpendicular al radio. La pendiende del segmento CA es

$$m_2 = \frac{-1-1}{2-4} = 1\,.$$

Entonces, la recta tangente tiene pendiente $m_1 = -1$ y pasa por A, luego la ecuación de la recta es

$$y+1 = -1\cdot(x-2) \Longleftrightarrow y+1 = -x+2 \Longleftrightarrow x+y=1$$

c) Por el inciso anterior, la recta $x+y=1$ es tangente a la circunferencia, luego su distancia al centro es el radio $r=\sqrt{8}$.

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 2.

CC 1. 1 punto por determinar el centro de la circunferencia.

CC 2. 1 punto por determinar el radio de la circunfenrencia.

CC 3. 1 punto por hallar la pendiente de la recta tangente.

CC 4. 1 punto por determinar la ecuación de la recta tangente.

CC 5. 2 puntos por hallar la distancia de la recta tangente al centro de la circunferencia.

3. Encuentre la ecuación de la trayectoria de un punto $P(x, y)$ que se mueve de modo que su distancia a $A(5, 0)$ es la mitad de su distancia a la recta $x = 20$. Identifique el lugar geométrico, indicando qué tipo de cónica representa.

Solución. Sea L la recta de ecuación $x - 20 = 0$. Entonces, la ecuación de la trayectoria es

$$AP = \frac{1}{2} \cdot d(P, L) \iff \sqrt{(x-5)^2 + y^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|x-20|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} \iff \sqrt{(x-5)^2 + y^2} = \frac{1}{2}|x-20|$$

Elevando al cuadrado, obtenemos que

$$\begin{aligned}
(x-5)^2 + y^2 = \frac{1}{4}(x-20)^2 &\iff x^2 - 10x + 25 + y^2 = \frac{1}{4}(x^2 - 40x + 400) \\
&\iff 4x^2 - 40x + 100 + 4y^2 = x^2 - 40x + 400 \\
&\iff 3x^2 + 4y^2 = 300 \\
&\iff \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{75} = 1
\end{aligned}$$

El lugar geométrico es una elipse.

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 3.

CC 1. 2 puntos por establecer la ecuación $AP = \frac{1}{2} \cdot d(P, L)$.

CC 2. 2 puntos por elevar al cuadrado y reducir la ecuación a la igualdad $3x^2 + 4y^2 = 300$

CC 3. 2 puntos por identificar que el lugar geométrico es una elipse.