Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer Semestre 2025

Introducción al Álgebra y Geometría - MAT1207
Interrogación N°7

1. Considere $w = 1 - \sqrt{3}\, i$.

   a) Halle la forma polar de w y determine el valor de w^{90}.

   b) Resuelva la ecuación
   $$z^3 = 4\big(1 - \sqrt{3}i\big)$$

   Solución.

   a) El módulo de w es $|w| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$ y su argumento es
   $$\theta = 2\pi + \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right) = 2\pi - \arctan(\sqrt{3}) = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}\,.$$
   La forma polar de $w = 2\text{cis}\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)$ y se tiene que
   $$w^{90} = 2^{90} \cdot \text{cis}\left(\frac{90 \cdot 5\pi}{3}\right) = 2^{90}\text{cis}\,(150\pi) = 2^{90}[\cos(150\pi + i\,\sin(150\pi)] = 2^{90}\,.$$

   b) Notemos que la ecuación es equivalente a
   $$z^3 = 4w \Longleftrightarrow z^3 = 4 \cdot 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{5\pi}{3}\right) \Longleftrightarrow z^3 = 8 \cdot \text{cis}\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$
   Entonces, las soluciones son
   $$z_k = \sqrt[3]{8} \cdot \text{cis}\left(\frac{\dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi}{3}\right) = 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{5\pi + 6k\pi}{9}\right)$$
   para $k = 0, 1, 2$.

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 1.

CC 1. 1 puntos por obtener la forma polar de w.

CC 2. 2 punto por determinar el valor de w^{90}.

CC 3. 1 punto por obtener que la ecuación es equivalente a $z^3 = 8\text{cis}\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)$

CC 4. 2 punto por determinar las soluciones z_k.

2. Sea $P(x) = x^3 - 7x^2 + 9x + 5$. Encuentre todos los ceros de P.

Solución. Notemos que $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, entonces podemos aplicar el teorema de las raíces racionales. El coeficiente principal de P es 1, de modo que todos los ceros racionales son enteros: son divisores del término constante 5. Entonces, los posibles candidatos son

$$\pm 1, \pm 5\,.$$

Notemos que $P(5) = 0$, luego P se factoriza como

$$x^3 - 7x^2 + 9x + 5 = (x - 5)(x^2 - 2x - 1)$$

A continuación usando la fórmula cuadrática para obtener los dos ceros restantes de P:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-1)}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Los ceros de P son 5, $1 + \sqrt{2}$ y $1 - \sqrt{2}$.

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 2.

CC 1. 1,5 puntos por usar el teorema de las raíces racionales y obtener los candidatos a raíces.

CC 2. 1,5 puntos por obtener que 5 es raíz de $P(x)$.

CC 3. 1,5 puntos por realizar la división y obtener que $P(x) = (x - 5)(x^2 - 2x - 1)$.

CC 4. 1,5 puntos por determinar las raíces $1 \pm \sqrt{2}$ del polinomio $x^2 - 2x - 1$.

3. Se sabe que $3+3i$ es raíz del polinomio

$$Q(x) = x^4 - 6x^3 + 19x^2 - 6x + 18.$$

Factorice $Q(x)$ por completo sobre $\mathbb{C}$.

Solución. Como $Q(x)$ tiene coeficientes reales y $\alpha = 3+3i$ es raíz de $P(x)$, entonces $\overline{\alpha} = 3-3i$ también es raíz. Entonces,

$$(x-\alpha)(x-\overline{\alpha}) = x^2 - 2\mathrm{Re}(\alpha)x + |\alpha|^2 = x^2 - 6x + 18$$

es factor de $Q(x)$. Realizando la división se obtiene que

$$Q(x) = (x^2 - 6x + 18)(x^2 + 1) = (x-\alpha)(x-\overline{\alpha})(x^2+1)$$

Las raíces de la ecuación $x^2 + 1 = 0$ son $\pm i$. Por lo tanto, la factorización de $Q(x)$ es

$$Q(x) = (x-\alpha)(x-\overline{\alpha})(x-i)(x+i)\,.$$

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 3.

CC 1. 1,5 puntos por usar el teorema de las raíces complejas conjugadas y obtener que $\overline{\alpha}$ también es raíz

CC 2. 1,5 puntos por obtener que $(x-\alpha)(x-\overline{\alpha}) = x^2 - 6x + 18$ es factor de $P(x)$

CC 3. 1,5 puntos por realizar la división y obtener que $P(x) = (x-\alpha)(x-\overline{\alpha})(x^2+1)$

CC 4. 1,5 puntos por determinar las raíces de x^2+1 y la factorización completa de $P(x)$.