Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer Semestre 2025

Introducción al Álgebra y Geometría - MAT1207
Interrogación N°6

1. a) Demuestre que, para $x \in (-1, 1)$, se cumple la identidad

$$2\arctan(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) .$$

b) Resuelva la siguiente ecuación trigonométrica

$$\sin(x)\sec^2(x) - 2\sin(x) = 0 .$$

Solución.

a) Sean

$$\begin{aligned} \alpha = \arctan(x) &\implies (\tan(\alpha) = x) \wedge \left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right) \\ \beta = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) &\implies \left(\tan(\beta) = \frac{2x}{1-x^2}\right) \wedge \left(-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Entonces, se tiene que

$$\tan(\beta) = \frac{2x}{1-x^2} = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)} = \tan(2\alpha)$$

de donde se sigue que $\beta = 2\alpha$.

b) Factorizando por $\sin(x)$ se obtiene

$$\sin(x)(\sec^2(x) - 2) = 0 \iff (\sin(x) = 0) \vee (\sec^2(x) = 2)$$

- $\sin(x) = 0 \implies x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
- $\sec^2(x) = 2 \implies \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 2 \implies \cos^2(x) = \dfrac{1}{2} \implies \cos(x) = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
  - $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \implies x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
  - $\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \implies x = \pm\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Otra forma. Para resolver la ecuación $\sec^2(x) = 2$:

$$\sec^2(x) = 2 \implies \sec^2(x) - 1 = 1 \implies \tan^2(x) = 1 \implies \tan(x) = \pm 1$$

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 1a)

CC 1. 1 punto por definir α y β

CC 2. 1,5 puntos por verificar que $\tan(\beta) = \tan(2\alpha)$

CC 3. 0,5 puntos por concluir que $\beta = 2\alpha$.

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 1b)

CC 1. 1 punto por factorizar y obtener las ecuaciones $\sin(x) = 0$ y $\sec^2(x) = 2$.

CC 2. 1 punto por resolver la ecuación $\sin(x) = 0$.

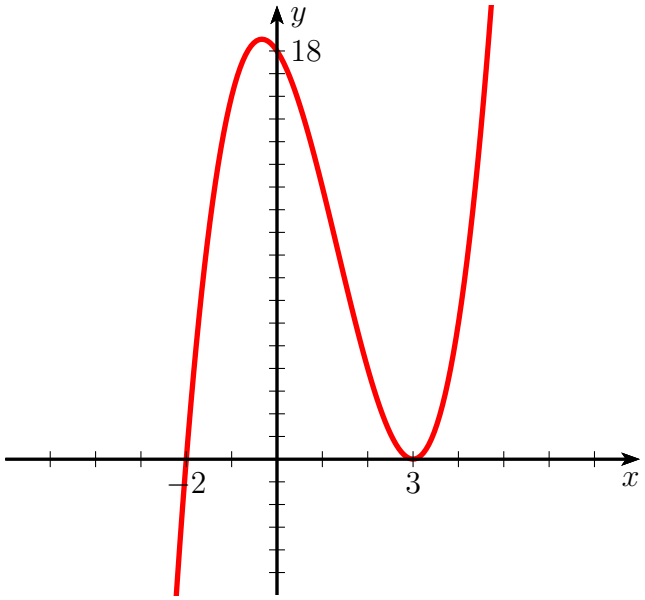
CC 3. 1 punto por resolver la ecaución $\sec^2(x) = 2$.

2. a) Considere el polinomio

$$P(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12\,.$$

Sabiendo que 2 es una raíz de $P(x)$, factorice el polinomio y use la forma factorizada para hallar los ceros. Trace la gráfica de $P(x)$.

b) Determine el polinomio $P(x)$ cuyo gráfico es dado, sabiendo que su grado es 3.

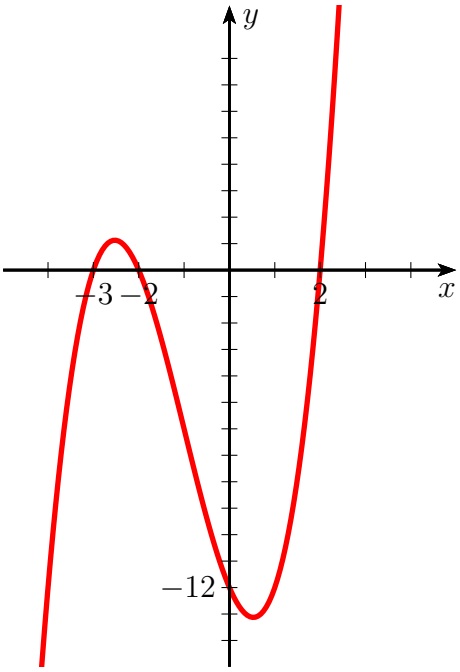


Solución.

a) Como 2 es raíz de $P(x)$, entonces $(x-2)$ es factor de $P(x)$ y realizando la división de polinomios se obtiene que

$$P(x) = (x-2)(x^2+5x+6) = (x-2)(x+3)(x+2)$$

Los ceros de P son $x = -3$, $x = -2$ y $x = 2$, su gráfica se muestra a continuación:



b) Vemos que -2 es raíz simple y que 3 es raíz de multiplicidad par. Como $P(x)$ es grado 3, concluimos que 3 es raíz doble. Por lo tanto,

$$P(x) = a(x+2)(x-3)^2 \, .$$

Además, del gráfico de P vemos que $P(0) = 18$, luego

$$P(0) = a(0+2)(0-3)^2 = 18 \Longrightarrow a = 1$$

Se sigue que $P(x) = (x+2)(x-3)^2$.

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 2a)

CC 1. 1 punto por factorizar $P(x)$ por $(x-2)$

CC 2. 1 punto por obtener las tres raíces de $P(x)$.

CC 3. 1 punto por esbozar el gráfico de $P(x)$.

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 2b)

CC 1. 1 punto por obtener que 2 es raíz simple y 3 es raíz de multiplicidad par.

CC 2. 1 punto por obtener que $P(x) = a(x+2)(x-3)^2$.

CC 3. 1 punto por obtener el valor de $a = 1$.