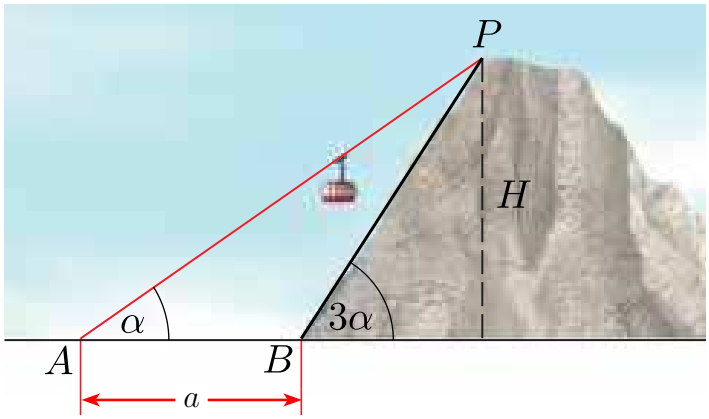
Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer Semestre 2025

Introducción al Álgebra y Geometría - MAT1207
Interrogación N°5

1. Un teleférico lleva pasajeros desde el punto A a la cima P del cerro. Se sabe que el punto A se encuentra a distancia a metros del pie B del cerro. Además, el ángulo de elevación del punto P, visto desde A, es α y el ángulo de elevación de P, visto desde B es de 3α (ver figura).



Demuestre que la altura H del cerro es

$$H = \frac{a\,\mathrm{sen}(3\alpha)}{2\cos(\alpha)}\,.$$

Solución. Considere el triángulo ABP de la figura 1. Tenemos que 3α y β forman un ángulo extendido entonces $\beta = \pi - 3\alpha$.

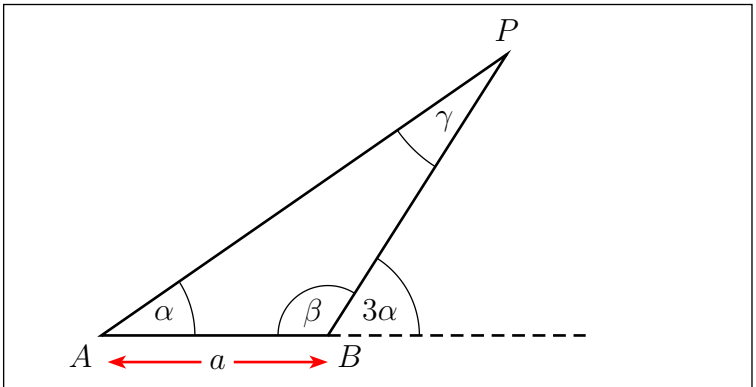


Figura 1

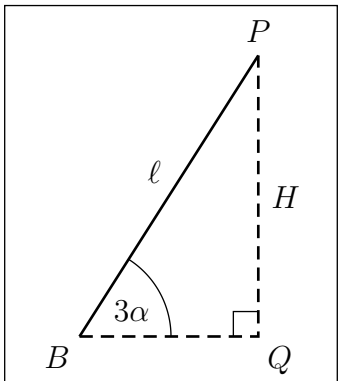


Figura 2

Además,

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \Longrightarrow \alpha + \pi - 3\alpha + \gamma = \pi \Longrightarrow \gamma = 2\alpha\,.$$

Usando el teorema del seno, denotamos por $\ell = d(B, P)$, obtenemos que

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\ell} = \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{a} \Longrightarrow \ell = \frac{a\operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{sen}(2\alpha)}\,.$$

Sea Q el punto donde se realiza la altura del cerro tal como muestra la figura 2. Se tiene que

$$\operatorname{sen}(3\alpha) = \frac{H}{\ell} \quad \Longrightarrow \quad H = \ell\operatorname{sen}(3\alpha) = \frac{a\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(3\alpha)}{\operatorname{sen}(2\alpha)} = \frac{a\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(3\alpha)}{2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha)} = \frac{a\operatorname{sen}(3\alpha)}{2\cos(\alpha)}\,.$$

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 1.

CC 1. 1,5 puntos por deducir que la medida del ángulo APB es 2α.

CC 2. 1,5 puntos por usar el teorema del seno y obtener que $\ell = \dfrac{a\sin(\alpha)}{\sin(\alpha)}$.

CC 3. 1,5 puntos por usar razones trigonométricas en el triángulo BPQ y deducir que $H = \ell\sin(3\alpha)$.

CC 4. 1,5 puntos por usar la identidad de ángulo doble y obtener el resultado.

2. a) Si $a\cos^2(\alpha) + b\sin^2(\alpha) = c$, demuestre que

$$\tan^2(\alpha) = \frac{c-a}{b-c}\,.$$

b) Calcule

i. $\cos\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)$ ii. $\sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)$

Solución.

a) Si reemplazamos $\cos^2(\alpha) = 1 - \sin^2(\alpha)$ en la identidad dada, se obtiene que

$$a(1-\sin^2(\alpha)) + b\sin^2(\alpha) = c \Longrightarrow a + \sin^2(\alpha)(b-a) = c \Longrightarrow \sin^2(\alpha) = \frac{c-a}{b-a}\,.$$

De manera similar, si reemplazamos $\sin^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha)$ en la misma identidad dada obtenemos

$$a\cos^2(\alpha) + b(1-\cos^2(\alpha)) = c \Longrightarrow \cos^2(\alpha)(a-b) + b = c \Longrightarrow \cos^2(\alpha) = \frac{c-b}{a-b}\,.$$

Se sigue que

$$\tan^2(\alpha) = \frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = \frac{c-a}{b-c}\,.$$

b) Tenemos que

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) &= -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\\
\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)\\
&= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\\
&= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}
\end{aligned}$$

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 2.

CC 1. 1 punto por deducir que $\sin^2(\alpha) = (c-a)/(b-a)$.

CC 2. 1 punto por deducir que $\cos^2(\alpha) = (c-b)/(a-b)$.

CC 3. 1 punto por deducir que $\tan^2(\alpha) = (c-a)/(b-c)$.

CC 4. 1,5 puntos por obtener que $\cos(7\pi/6) = -\sqrt{3}/2$.

CC 5. 1,5 puntos por obtener que $\sin(-\pi/12) = (\sqrt{2}-\sqrt{6})/4$.