Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer Semestre 2025

**Introducción al Álgebra y Geometría - MAT1207**
**Interrogación N°4**

1. Sea $\{a_n\}$ una sucesión aritmética de diferencia $d$.

   a) **[2 puntos]** Verifique que
   $$\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}} = \frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{d}\,.$$

   b) **[4 puntos]** Demuestre que
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}} = \frac{n}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_{n+1}}}\,.$$

**Solución.**

a) Racionalizando el denominador vemos que
$$\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}} = \frac{\sqrt{a_k}-\sqrt{a_{k+1}}}{a_k-a_{k+1}} = \frac{\sqrt{a_k}-\sqrt{a_{k+1}}}{-d} = \frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{d}$$

b) Usando la propiedad telescópica y el inciso a) se obtiene que
$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}} &= \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{n}\left[\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}\right] \\
&= \frac{1}{d}\left[\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_1}\right] \\
&= \frac{1}{d}\left[\frac{a_{n+1}-a_1}{\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_1}}\right] \\
&= \frac{1}{d}\left[\frac{a_1+nd-a_1}{\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_1}}\right] \\
&= \frac{n}{\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_1}}\,.
\end{aligned}$$

**Criterio de Corrección (CC) Pregunta 1.**

**CC 1.** 2 puntos por verificar la identidad del inciso a).

**CC 2.** 2 puntos por usar la propiedad telescópica.

**CC 3.** 1 punto por amplificar $\frac{1}{d}\left[\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_1}\right]$ por $\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_1}$.

**CC 4.** 1 punto por simplificar $a_{n+1}-a_1 = nd$ con $d$.

2. Encuentre el término independiente de $x$ en el desarrollo de

$$(2x+1)\left(1+\frac{2}{x}\right)^{15}.$$

**Solución.** Por el teorema del binomio, se tiene que

$$\begin{aligned}(2x+1)\left(1+\frac{2}{x}\right)^{15} &= (2x+1)\sum_{k=0}^{15}\binom{15}{k}\left(\frac{2}{x}\right)^{k}\\ &= (2x+1)\sum_{k=0}^{15}\binom{15}{k}2^k\cdot x^{-k}\\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{15}\binom{15}{k}2^{k+1}\cdot x^{1-k}}_{S_1}+\underbrace{\sum_{k=0}^{15}\binom{15}{k}2^k\cdot x^{-k}}_{S_2}\end{aligned}$$

- En $S_1$ el término independiente de $x$ aparece cuando $1-k=0\Longrightarrow k=1$ y el término es

$$T_1=\binom{15}{1}2^2=15\cdot 4=60\,.$$

- En $S_2$ el término independiente de $x$ aparece cuando $-k=0\Longrightarrow k=0$ y el término es

$$T_2=\binom{15}{0}2^0=1\,.$$

Por lo tanto, el término independiente de $x$ en el desarrollo es $T=T_1+T_2=60+1=61$.

**Criterio de Corrección (CC) Pregunta 2.**

**CC 1.** 2 puntos por aplicar el teorema del binomio.

**CC 2.** 2 puntos por multiplicar $(2x+1)$ con $\displaystyle\sum_{k=0}^{15}\binom{15}{k}2^k\cdot x^{-k}$ y obtener las sumas $S_1$ y $S_2$.

**CC 3.** 1 punto por identificar el término independiete de $x$ en $S_1$

**CC 4.** 1 punto por identificar el término independiete de $x$ en $S_2$