Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer Semestre 2025

Introducción al Álgebra y Geometría - MAT1207
Interrogación N°3

1. Considere los conjuntos $X = \{0, 1, 2\}$ e $Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y la función proposicional de dos variables

$$P(x, y) \ : x \text{ es mayor o igual que } y \, .$$

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $[(\forall x \in X)(\exists\, y \in Y)P(x, y)] \Longrightarrow [(\exists\, x \in X)(\forall\, y \in Y)P(x, y)]$

b) $[(\forall y \in Y)(\exists\, x \in X)P(x, y)] \Longrightarrow [(\exists\, y \in Y)(\forall\, x \in X)P(x, y)]$

Solución. Tenemos que

$$A = \{(x, y) \in X \times Y \mid P(x, y) \text{ es verdadera}\} = \{(0, 0), (1, 0)(1, 1), (2, 0), (2, 1), (2, 2)\} \, .$$

Note que todos los elementos de X están relacionados con al menos un elemento de Y , por lo tanto $(\forall x \in X)(\exists\, y \in Y)P(x, y)$ es verdadera.

Además, no existe elemento alguno de X relacionado con todos los elementos de Y, por lo tanto la proposición $(\exists\, x \in X)(\forall\, y \in Y)P(x, y)$ es falsa.

Así mismo, podemos notar que la proposición $(\forall y \in Y)(\exists\, x \in X)P(x, y)$ es falsa, mientras que $(\exists\, y \in Y)(\forall\, x \in X)P(x, y)$ es verdadera.

Luego tenemos que

a) $(\forall x \in X)(\exists\, y \in Y)P(x, y) \Longrightarrow (\exists\, x \in X)(\forall\, y \in Y)P(x, y)$ es falsa

b) $(\forall y \in Y)(\exists\, x \in X)P(x, y) \Longrightarrow (\exists\, y \in Y)(\forall\, x \in X)P(x, y)$ es verdadera.

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 1.

CC 1. 1 punto por determinar el valor de verdad de $[(\forall x \in X)(\exists\, y \in Y)P(x, y)]$

CC 2. 1 punto por determinar el valor de verdad de $[(\exists\, x \in X)(\forall\, y \in Y)P(x, y)]$

CC 3. 1 punto por determinar el valor de verdad de $[(\forall y \in Y)(\exists\, x \in X)P(x, y)]$

CC 4. 1 punto por determinar el valor de verdad de $[(\exists\, y \in Y)(\forall\, x \in X)P(x, y)]$

CC 5. 1 punto por determinar el valor de verdad del inciso a)

CC 6. 1 punto por determinar el valor de verdad del inciso b)

2. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = (n-1)2^{n+1} + 2\,.$$

Solución. Considere la función proposicional

$$P(n)\ :\quad \sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = (n-1)2^{n+1} - 2\,.$$

Vamos usar el principio de inducción.

Caso base: Por demostrar que $P(1)$ es verdadero.

El lado izquierdo de $P(1)$ es $1 \cdot 2^1 = 2$ mientras que el lado derecho es igual a $(1-1)2^{1+1} + 2 = 2$. Como ambos lados son iguales se sigue que $P(1)$ es verdadero.

Paso inductivo: Vamos a suponer que

$$P(k)\ :\quad \sum_{\ell=1}^{k} \ell \cdot 2^\ell = (k-1)2^{k+1} - 2$$

es verdadero y vamos a probar que

$$P(k+1)\ :\quad \sum_{\ell=1}^{k+1} \ell \cdot 2^\ell = k2^{k+2} - 2$$

es verdadero.

En efecto, se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^{k+1} \ell \cdot 2^\ell &= \sum_{\ell=1}^{k} \ell \cdot 2^\ell + (k+1) \cdot 2^{k+1} && \text{(separando la suma)} \\
&= (k-1) \cdot 2^{k+1} - 2 + (k+1) \cdot 2^{k+1} && \text{(hipótesis inductiva)} \\
&= (k-1+k+1) \cdot 2^{k+1} - 2 && \text{(factorizando por } 2^{k+1}\text{)} \\
&= 2 \cdot k \cdot 2^{k+1} - 2 \\
&= k \cdot 2^{k+2} - 2
\end{aligned}$$

como queríamos probar, luego $P(k+1)$ es verdadero.

Conclusión: Por lo tanto, por el principio de inducción se sigue que $P(n)$ es verdadero para todo $n \in \mathbb{N}$.

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 2.

CC 1. 1,5 puntos por demostrar que $P(1)$ es verdadero.

CC 2. 1,5 puntos por determinar la proposición $P(k+1)$

CC 3. 1,5 puntos por partir del lado izquierdo de $P(k+1)$ y usar la hipótesis inductiva para obtener que $\sum_{\ell=1}^{k+1} \ell \cdot 2^{\ell} = (k-1) \cdot 2^{k+1} - 2 + (k+1) \cdot 2^{k+1}$

CC 4. 1,5 puntos por terminar la demostración y concluir que $P(n)$ es verdero para todo $n \in \mathbb{N}$.