Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer Semestre 2025

Introducción al Cálculo - MAT1207
Interrogación N°1

1. Verifique que la siguiente proposición es una tautología

$$[(\overline{p} \vee q) \vee (\overline{r} \wedge \overline{p})] \Longleftrightarrow (\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}) \, .$$

Solución. Usando una tabla de verdad, vemos que

p	q	r	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{r}$	$\overline{p} \vee q$	$\overline{r} \wedge \overline{p}$	$(\overline{p} \vee q) \vee (\overline{r} \wedge \overline{p})$	$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$	$[(\overline{p} \vee q) \vee (\overline{r} \wedge \overline{p})] \Longleftrightarrow (\overline{q} \Longrightarrow \overline{p})$
V	V	V	F	F	F	V	F	V	V	V
V	V	F	F	F	V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	V	F	F	F	F	F	V
V	F	F	F	V	V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	F	V	F	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V

Por lo tanto, la proposición es una tautología.

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 1.

CC 1. 3 puntos por construir correctamente la tabla de verdad, identificando claramente las columnas intermedias.

CC 2. 2 puntos por obtener correctamente todos los valores de verdad de la proposición final.

CC 3. 1 punto por justificar explícitamente que, dado que todos los valores finales son verdaderos, la proposición es una tautología.

2. Pruebe, sin usar tablas de verdad, que la siguiente proposición

$$[(\overline{p} \wedge q) \Longrightarrow (q \Longrightarrow p)] \wedge p$$

es equivalente a p.

Solución. Usando las leyes de la lógica, vemos que

$$\begin{aligned}
[(\overline{p} \wedge q) \Longrightarrow (q \Longrightarrow p)] \wedge p &\equiv [\overline{(\overline{p} \wedge q)} \vee (q \Longrightarrow p)] \wedge p && \text{(Caract. de la implicación)} \\
&\equiv [(\overline{(\overline{p})} \vee \overline{q}) \vee (q \Longrightarrow p)] \wedge p && \text{(De Morgan)} \\
&\equiv [(p \vee \overline{q}) \vee (q \Longrightarrow p)] \wedge p && \text{(Doble negación)} \\
&\equiv [(p \vee \overline{q}) \vee (\overline{q} \vee p)] \wedge p && \text{(Caract. de la implicación)} \\
&\equiv [(p \vee \overline{q}) \vee (p \vee \overline{q})] \wedge p && \text{(Conmutatividad)} \\
&\equiv [(p \vee \overline{q})] \wedge p && \text{(Idempotencia)} \\
&\equiv p && \text{(Absorción)}
\end{aligned}$$

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 2.

CC 1. (1 punto) Aplicar correctamente la caracterización de la implicación:

$$[(\overline{p} \wedge q) \Longrightarrow (q \Longrightarrow p)] \equiv [\overline{(\overline{p} \wedge q)} \vee (q \Longrightarrow p)].$$

CC 2. (1 punto) Aplicar correctamente la ley de De Morgan:

$$\overline{(\overline{p} \wedge q)} \equiv (\overline{\overline{p}} \vee \overline{q}).$$

CC 3. (1 punto) Aplicar correctamente la ley de la doble negación:

$$\overline{\overline{p}} \equiv p.$$

CC 4. (1 punto) Aplicar correctamente la caracterización de la implicación nuevamente:

$$q \Longrightarrow p \equiv (\overline{q} \vee p).$$

CC 5. (1 punto) Aplicar correctamente la ley de idempotencia:

$$(p \vee \overline{q}) \vee (p \vee \overline{q}) \equiv (p \vee \overline{q}).$$

CC 6. (1 punto) Aplicar correctamente la ley de absorción, concluyendo claramente la equivalencia final con la proposición p:

$$(p \vee \overline{q}) \wedge p \equiv p.$$

3. Pruebe que si a es un número real tal que $a^2 \geqslant 3a$ entonces $a \leqslant 0$ o $a \geqslant 3$.

Solución. Considere las proposiciones:

$$p : a^2 \geqslant 3a \quad \text{y} \quad q : a \leqslant 0 \quad \text{o} \quad a \geqslant 3$$

entonces queremos probar que $p \Longrightarrow q$.

Usando la técnica de demostración contrarrecíproca: Vamos a probar que $\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$.

En efecto, supongamos que $a > 0$ y $a < 3$. Entonces, multiplicando por a (positivo) la desigualdad $a < 3$ se obtiene que $a^2 < 3a$, como queríamos probar.

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 3.

CC 1. 2 puntos por utilizar correctamente el método de la contrarrecíproca, suponiendo las condiciones contrarias.

CC 2. 2 puntos por multiplicar correctamente la desigualdad por a, considerando explícitamente que $a > 0$.

CC 3. 2 puntos por concluir claramente la desigualdad contraria ($a^2 < 3a$), completando adecuadamente la demostración.