Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer Semestre 2025

Introducción al Álgebra y Geometría - MAT1207
Examen

1. Demuestre que $4n^3 + 5n$ es divisible por 3 para todo $n \in \mathbb{N}$.

   Solución. Considere la función proposicional

   $$P(n) \ : \qquad (\exists\, k \in \mathbb{N})(4n^3 + 5n = 3k)$$

   Vamos a usar inducción sobre n.

   Caso base: Por demostrar que $P(1)$ es verdadero.

   Se tiene que $4 \cdot 1^3 + 5 \cdot 1 = 9 = 3 \cdot 3$, luego $P(1)$ es verdedero.

   Paso inductivo. Suponemos que $P(n)$ es verdadero, es decir que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $4n^3 + 5n = 3k$. Por demostrar que $P(n+1)$ es verdadero. Es decir, que existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que

   $$4(n+1)^3 + 5(n+1) = 3 \cdot \ell\,.$$

   En efecto, se tiene que

   $$\begin{aligned} 4(n+1)^3 + 5(n+1) &= 4(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + 5n + 5 \\ &= 4n^3 + 12n^2 + 12n + 4 + 5n + 5 \\ &= (4n^3 + 5n) + 12n^2 + 12n + 9 \\ &= 3k + 3(4n^2 + 4n + 3) \\ &= 3[k + 4n^2 + 4n + 3] \end{aligned}$$

   Luego existe $\ell = (k + 4n^2 + 4n + 3) \in \mathbb{N}$ y $P(n+1)$ es verdadero.

   Por lo tanto, $P(n)$ es verdadero para todo $n \in \mathbb{N}$.

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 1.

CC 1. 1 punto por establecer la función proposicional $P(n)$

CC 2. 1 punto por verificar que $P(1)$ es verdadero.

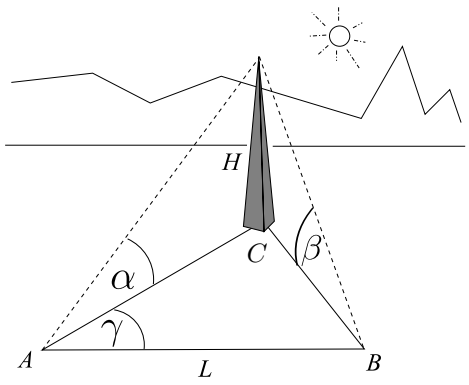
CC 3. 1 punto por establecer que $P(n+1)$

CC 4. 1 punto por calcular $4(n+1)^3 + 5(n+1)$ y obtener que es igual a $4n^3 + 12n^2 + 12n + 5n + 9$

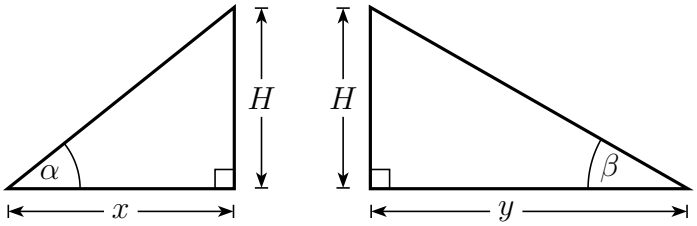
CC 5. 1 punto por usar la hipótesis inductiva y obtener que
$4n^3 + 12n^2 + 12n + 5n + 9 = 3k + 12n + 5n + 9$

CC 6. 1 punto por concluir que está ultima igualdad es un múltiplo de 3.

2. La altura H de la torre de la figura es desconocida. Se conocen los ángulos de elevación α y β medidos desde dos puntos A y B del suelo, separados por una distancia $L > 0$ y $\measuredangle CAB = \gamma$. Sabiendo que la torre es vertical respecto del suelo, calcule H en términos de L, α, β, γ.



Solución. Considere las siguientes figuras



Usando razones trigonométricas vemos que

$$y = \frac{H}{\tan\beta} = H\cot(\beta), \qquad x = \frac{H}{\tan\alpha} = H\cot(\alpha).$$

Usando el teorema del coseno en el triángulo ABC se obtiene que $y^2 = x^2 + L^2 - 2xL\cos(\gamma)$. Sustituyendo los valores de x e y

$$\begin{aligned} & (H\cot(\beta))^2 = (H\cot(\alpha))^2 + L^2 - 2\,(H\cot(\alpha))\,L\,\cos(\gamma) \\ \iff\quad & H^2\cot^2(\beta) - H^2\cot^2(\alpha) - L^2 + 2\,H\,L\,\cot(\alpha)\,\cos(\gamma) = 0 \\ \iff\quad & (\cot^2(\beta) - \cot^2(\alpha))\,H^2 + 2\,L\,\cot(\alpha)\,\cos(\gamma)\,H - L^2 = 0. \end{aligned}$$

El discriminante de esta ecuación cuadrática en la variable H es:

$$\Delta = 4L^2\cot^2(\alpha)\cos^2(\gamma) + 4L^2(\cot^2(\beta) - \cot^2(\alpha)) = 4L^2\big(\cot^2(\beta) - \cot^2(\alpha)\,\sin^2(\gamma)\big).$$

Usando la fórmula cuadrática obtenemos que

$$\begin{aligned} H &= \frac{-2L\cot(\alpha)\cos(\gamma) \pm 2L\sqrt{\cot^2(\beta) - \cot^2(\alpha)\,\sin^2(\gamma)}}{2(\cot^2(\beta) - \cot^2(\alpha))} \\ &= \frac{L\big(-\cot(\alpha)\cos(\gamma) \pm \sqrt{\cot^2(\beta) - \cot^2(\alpha)\,\sin^2(\gamma)}\big)}{\cot^2(\beta) - \cot^2(\alpha)}. \end{aligned}$$

Finalmente, selecionamos la rama positiva y obtenemos

$$H = \frac{L\big(\sqrt{\cot^2\beta - \cot^2\alpha\,\sin^2\gamma} - \cot\alpha\cos\gamma\big)}{\cot^2\beta - \cot^2\alpha}$$

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 2.

CC 1. 1,5 puntos por usar razones trigonométricas y obtener que $x = \dfrac{H}{\tan(\alpha)}$.

CC 2. 1,5 puntos por usar razones trigonométricas y obtener que $y = \dfrac{H}{\tan(\beta)}$.

CC 3. 1,5 puntos por usar el teorema del coseno y obtener que $y^2 = x^2 + L^2 - 2xL\cos(\gamma)$.

CC 4. 1,5 puntos por hallar el valor de H.

3. Utilizando la forma polar de los números complejos, demuestre que

$$(1+i)^{4n} - (1-i)^{4n} = 0$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solución. Sean $z = 1+i$ y $w = 1-i$. Entonces, la forma polar de estos números es

$$z = \sqrt{2}\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{y} \quad w = \sqrt{2}\text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right) .$$

Luego, usando la fórmula de De Moivre se obtiene que

$$\begin{aligned}
(1+i)^{4n} - (1-i)^{4n} &= z^{4n} - w^{4n} = \left(\sqrt{2}\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^{4n} - \left(\sqrt{2}\text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^{4n} \\
&= \left(\sqrt{2}\right)^{4n}\text{cis}\left(\frac{\pi\cdot 4n}{4}\right) - \left(\sqrt{2}\right)^{4n}\text{cis}\left(-\frac{\pi\cdot 4n}{4}\right) \\
&= 4^n\text{cis}\,(n\pi) - 4^n\text{cis}\,(-n\pi) \\
&= 4^n[\cos(n\pi) + i\sin(n\pi) - \cos(-n\pi) + i\sin(-n\pi)] \\
&= 4^n[\cos(n\pi) - \cos(n\pi)] = 0
\end{aligned}$$

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 3.

CC 1. 1,5 puntos por hallar la forma polar de $z = 1+i$

CC 2. 1,5 puntos por hallar la forma polar de $w = 1-i$

CC 3. 1,5 puntos por usar la fórmula de Moivre y obtene que $z^{4n} - w^{4n} = \left(\sqrt{2}\right)^{4n}\text{cis}\left(\frac{\pi\cdot 4n}{4}\right) - \left(\sqrt{2}\right)^{4n}\text{cis}\left(-\frac{\pi\cdot 4n}{4}\right)$.

CC 4. 1,5 puntos por verificar que esté último término es cero.

4. Encuentre todas las raíces del polinomio $P(x) = x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 22x + 13$ sabiendo que $\alpha = 2 + 3i$ es raíz compleja de P.

Solución. Como P tiene coeficientes reales y $\alpha = 2 + 3i$ es raíz de P entonces $\overline{\alpha} = 2 - 3i$ también es raíz de $P(x)$. Por el teorema del factor

$$(x - \alpha)(x - \overline{\alpha}) = x^2 - 2\mathrm{Re}(\alpha)x + |\alpha|^2 = x^2 - 4x + 13$$

es factor de $P(x)$. Realizando el algoritmo de la división se obtiene que

$$P(x) = (x - \alpha)(x - \overline{\alpha})(x^2 + 2x + 1) = (x - \alpha)(x - \overline{\alpha})(x + 1)^2 .$$

Por lo tanto, los ceros de $P(x)$ son α, $\overline{\alpha}$ y -1.

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 4.

CC 1. 1,5 puntos por concluir que $\overline{\alpha}$ también es raíz de $P(x)$.

CC 2. 1,5 puntos por calcular $(x - \alpha)(x - \overline{\alpha}) = x^2 - 4x + 13$.

CC 3. 1,5 puntos por realizar el algoritmo de la división y obtener que $P(x) = (x-\alpha)(x-\overline{\alpha})(x+1)^2$.

CC 4. 1,5 puntos por exhibir los ceros de $P(x)$.

5. Considere la ecuación

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 = 1\,.$$

a) Calcule el discriminante de la ecuación. Asumiendo que la cónica no es degenerada, determine si la gráfica de la ecuación es una parábola, elipse o hipérbola.

b) Determine los valores de $\sin(\phi)$ y $\cos(\phi)$ donde ϕ es el ángulo de la rotación de ejes que permite que la ecuación no tenga término mixto xy.

c) Determine la ecuación resultante que se obtiene al aplicar la rotación y exprese la ecuación de la forma $AX^2 + CY^2 = 1$.

Solución.

a) Se tiene que el discrimante es

$$\delta = B^2 - 4AC = (4)^2 - 4(5)(2) = -24 < 0$$

luego la gráfica de la ecuación corresponde a una elipse.

b) Tenemos que el ángulo de rotación ϕ satisaface

$$\tan(2\phi) = \frac{B}{A-C} = \frac{4}{5-2} = \frac{4}{3} \Longrightarrow \cos^2(2\phi) = \frac{1}{1+\tan^2(2\phi)} = \frac{1}{1+16/9} = \frac{9}{25}$$

entonces $\cos(2\phi) = \dfrac{3}{5}$. Ahora bien, obtenemos que

$$\begin{aligned} \sin(\phi) &= \sqrt{\frac{1-\cos(2\phi)}{2}} = \sqrt{\frac{1-3/5}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \cos(\phi) &= \sqrt{\frac{1+\cos(2\phi)}{2}} = \sqrt{\frac{1+3/5}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

c) Se tiene que

$$\begin{aligned} x &= \cos(\phi)X - \sin(\phi)Y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2X - Y) \\ y &= \sin(\phi)X + \cos(\phi)Y = \frac{1}{\sqrt{5}}(X + 2Y) \end{aligned}$$

Sustityendo en la ecuación original se obtiene

$$\begin{aligned} 5x^2 + 4xy + 2y^2 = 1 &\iff 5 \cdot \frac{1}{5}(2X - Y)^2 + \frac{4}{5}(2X - Y)(X + 2Y) + \frac{2}{5}(X + 2Y)^2 = 1 \\ &\iff 4X^2 - 4XY + Y^2 + \frac{4}{5}(2X^2 + 3XY - 2Y^2) + \frac{2}{5}(X^2 + 4XY + 4Y^2) = 1 \\ &\iff X^2\left(4 + \frac{8}{5} + \frac{2}{5}\right) + XY\left(-4 + \frac{12}{5} + \frac{8}{5}\right) + Y^2\left(1 - \frac{8}{5} + \frac{8}{5}\right) = 1 \\ &\iff 6X^2 + Y^2 = 1 \end{aligned}$$

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 5.

CC 1. 1 punto por calcular el discriminate y obtener que $\delta = -24 < 0$.

CC 2. 1 punto por concluir que la gráfica de la ecuación es una elipse.

CC 3. 1 punto por determinar el valor de $\cos(2\phi) = 3/5$.

CC 4. 1 punto por calcular $\sin(\phi) = 1/\sqrt{5}$ y $\cos(\phi) = 2/\sqrt{5}$.

CC 5. 1 punto por obtener que $x = (2X - Y)/\sqrt{5}$ y $y = (X + 2Y)/\sqrt{5}$.

CC 6. 1 punto por obtener la ecuación resultante $6X^2 + Y^2 = 1$.