Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
05/septiembre/2024.

MAT 1207
Pauta Interrogación 1.

1. *a*) Se define el conectivo lógico $*$ de forma que $p * q$ es falso solo si ambas proposiciones son verdaderas. Determine si la proposición

$$\underbrace{\Big[(p \longrightarrow q) \vee q\Big]}_{A} \longleftrightarrow \underbrace{\Big[(p \wedge \bar{q}) * \bar{q}\Big]}_{B}$$

es o no una Tautología.

Solución: Una forma de determinar si la proposición dada es o no una tautología, es usando tabla de verdad, se tiene:

p	q	$\bar{q}$	$p \longrightarrow q$	$(p \longrightarrow q) \vee q$	$p \wedge \bar{q}$	$(p \wedge \bar{q}) * \bar{q}$	$A \longleftrightarrow B$
V	V	F	V	V	F	V	V
V	F	V	F	F	V	F	V
F	V	F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	F	V	V

Como resultado de la tabla de verdad, se tiene que la proposición dada es una tautología.

Puntaje:

- 3 puntos por concluir correctamente que es una tautología.

Otra forma de desarrollo es:

a) Probar primero que $p * q \equiv \overline{p \wedge q}$.
b) Usando a), se prueba que

$$(p \wedge \bar{q}) * \bar{q} \Longleftrightarrow \overline{(p \wedge \bar{q}) \wedge \bar{q}} \Longleftrightarrow \overline{(p \wedge \bar{q})} \Longleftrightarrow \bar{p} \vee q \Longleftrightarrow (\bar{p} \vee q) \vee q \Longleftrightarrow (p \longrightarrow q) \vee q$$

Puntaje:

- $1,5$ puntos por a).
- $1,5$ puntos por b).

b) Sin usar tabla de verdad, determine el valor de verdad de p, q, r y s, sabiendo que la proposición:

$$\Big[\overline{p} \longrightarrow s\Big] \longrightarrow \Big[(s \longrightarrow q) \longrightarrow (p \vee r)\Big] \quad \text{es falsa.}$$

Solución: Como la proposición dada es falsa, entonces

- $\Big[\overline{p} \longrightarrow s\Big]$ es verdadera y $\Big[(s \longrightarrow q) \longrightarrow (p \vee r)\Big]$ es falsa.
- Ahora si, $\Big[(s \longrightarrow q) \longrightarrow (p \vee r)\Big]$ es falsa, entonces $(s \longrightarrow q)$ es verdadera y $(p \vee r)$ es falsa.
- Como $(p \vee r)$ es falsa, entonces p y r son falsas.
- Por otra parte como $\Big[\overline{p} \longrightarrow s\Big]$ es verdadera y p es falsa, de donde $\overline{p}$ es verdadera, luego necesariamente s debe ser verdadera.
- Por último, como $(s \longrightarrow q)$ es verdadera, como s es verdadera, entonces q es verdadera.
- Por lo tanto p y r son falsas y s y q son verdaderas.

Puntaje:

- $0,5$ puntos por cada item.

2. *a)* [4 puntos.] Demuestre usando el método de reducción al absurdo o por contradicción que si n es un número entero, tal que n^2 es par, entonces n es par.

Solución:

i) Debemos probar que si $n \in \mathbb{Z}$, entonces

$$n^2 \text{ es par } \Longrightarrow n \text{ es par}$$

luego la hipótesis es H: n^2 es par
y la tésis es T: n es par.

ii) Según el método de reducción al absurdo consideramos $H \wedge \overline{T}$, esto es:

Suponemos que n^2 par y que n no es par.

iii) Pero entonces n es impar, por lo tanto es de la forma

$$n = 2k + 1 \ , \quad \text{con } \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Longrightarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\underbrace{(2k^2 + 2k)}_{\in \mathbb{Z}} + 1$$

de donde se obtiene que n^2 es impar, lo que es un absurdo, ya que por hipótesis n^2 es par.

iv) Así hemos probado que para $n \in \mathbb{Z}$: n^2 es par $\Longrightarrow n$ es par

Puntaje:

- $0,5$ puntos por i).
- 1 punto por ii).
- 2 puntos por iii).
- $0,5$ puntos por iv).

b) [2 puntos.] Niegue la siguiente proposición:

$$(\forall\, x \in A)(\exists\, y \in B)(x + y > 2 \Longrightarrow x < 5)$$

Solución:

$$\overline{(\forall\, x \in A)(\exists\, y \in B)(x + y > 2 \Longrightarrow x < 5)} \equiv \overline{(\forall\, x \in A)}\ \overline{(\exists\, y \in B)}\ \overline{(x + y > 2 \Longrightarrow x < 5)}$$

$$\equiv (\exists\, x \in A)(\forall\, y \in B)\left[(x+y > 2) \wedge \overline{(x < 5)}\right] \equiv (\exists\, x \in A)(\forall\, y \in B)\left[(x+y > 2) \wedge (x \geq 5)\right]$$

Puntaje:

- $0,5$ puntos por la negación de $(\forall\, x \in A)$.
- $0,5$ puntos por la negación de $(\exists\, y \in B)$.
- 1 punto por la negación de $(x + y > 2 \Longrightarrow x < 5)$.

3. Demuestre usando inducción que:

$$6^n - 1 \text{ es divisible por } 5\,,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Solución: Sea $p(n) : 6^n - 1$ es divisible por 5.

i) Si n=1, se tiene:

$$6^1 - 1 = 5 \text{ y es divisible por } 5$$

luego se cumple $p(1)$.

ii) H.I.:
Suponemos que se cumple $p(k)$, esto es que $6^k - 1$ es divisible por 5.

iii) Para $p(k+1)$, debemos probar que $6^{k+1} - 1$ es divisible por 5. Se tiene:

$$6^{k+1} - 1 = 6^k \cdot 6 - 1 = 6^k \cdot (5+1) - 1 = \underbrace{6^k \cdot 5}_{I} + \underbrace{6^k - 1}_{II} \text{ y es divisible por } 5$$

ya que I es divisible por 5, pues $6^k \in \mathbb{N}$ y II es divisible por 5 por H.I., así se tiene $p(k+1)$.

- Entonces por $i)$, $ii)$ y $iii)$ y por primer principio de inducción: $p(n)$ es válida $\forall n \in \mathbb{N}$. luego

$$6^n - 1 \text{ es divisible por } 5\,,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Puntaje:

- 1 puntos por $p(1)$.
- 1 puntos por la H.I.
- 3 puntos por la demostración de $p(k+1)$.
- 1 puntos por la conclusión.

4. *a)* Sean A y B conjuntos en un universo U, demuestre que:

$$A \subseteq B \Longrightarrow B^c \subseteq A^c$$

Solución:

i) La hipótesis H y la tésis T, están dadas por
H: $A \subseteq B$
T: $B^c \subseteq A^c$

ii) Sea x arbitrario, se tiene:

$$\begin{aligned} x \in B^c &\Longrightarrow x \notin B \quad \text{(definición de complemento)} \\ &\Longrightarrow x \notin A \quad \text{(por hipótesis pues } A \subseteq B\text{)} \\ &\Longrightarrow x \in A^c \quad \text{(definición de complemento)} \end{aligned}$$

iii) Por lo tanto $B^c \subseteq A^c$.

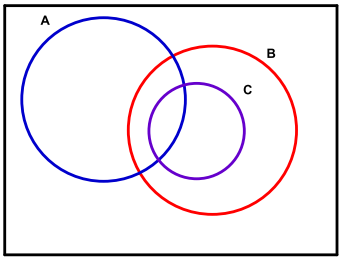
Puntaje:

- 1 punto por *i*).
- $1,5$ puntos por *ii*).
- $0,5$ puntos por *iii*).

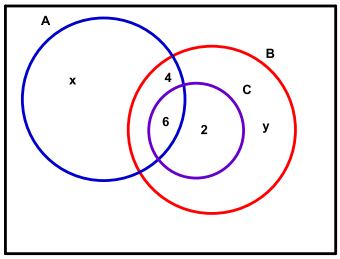
b) En un Universo de 34 elementos, se consideran tres conjuntos A, B y C tales que $C \subseteq B$, $n(C) = 8$, $n(A \cup C) = 24$, $n(A \cap B) = 10$, $n(B) = 22$, $n(A \cap C) = 6$.
¿Cuántos elementos se encuentran sólo en A?

Solución:

i) Considerando las condiciones sobre A, B y C, se tiene



ii) Considerando las condiciones: $n(C) = 8$, $n(A \cap B) = 10$ y que $n(A \cap C) = 6$, se tiene:



iii) Falta determinar x.

Como $n(A \cup C) = n(A) + n(C) - n(A \cap C) \Longrightarrow n(A) = 24 - 8 + 6 = 22$

iv) luego

$$n(A - B) = 22 - 10 = 12$$

Por lo tanto hay 12 elementos que se encuentran solo en A. La condición n(B)=22, asegura que no hay elementos que no estén em $A \cap B$.

Puntaje:

- 1 punto por obtener *ii*).
- 1 punto por *iii*).
- 1 puntos por *iv*) y concluir que $n(A - B) = 12$.